

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.Б. Костин, И.В. Тихонов, Д.С. Ткаченко

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Пособие по практическим занятиям Часть I

Рекомендовано УМО «Ядерная физика и технологии» в качестве
учебного пособия для студентов высших учебных заведений

Москва 2007

УДК 517.95
ББК 22.311
517
К 72

Костин А.Б., Тихонов И.В., Ткаченко Д.С. **Уравнения математической физики: Пособие по практическим занятиям. Часть I:** Учебное пособие. – М.: МИФИ, 2007. – 152 с.

Математическая физика появилась как ответ на потребности физики иметь математический аппарат, адекватно описывающий физические процессы и предлагающий методы решения возникающих задач. Развивающаяся более двухсот лет, математическая физика представляет сейчас обширный набор математических моделей, описывающих разнообразные процессы (не только физические, но и экономические, социальные и др.), развитой аппарат и широкий набор методов решения задач, появляющихся в рамках этих моделей.

Математические модели сколько-нибудь сложных процессов включают в себя дифференциальные уравнения и различные дополнительные условия – начальные, краевые, условия согласования и др. Поэтому основное внимание данного курса уделяется осмысленным постановкам задач для уравнений математической физики и простейшим методам поиска их решений. В курсе рассматриваются модельные постановки, позволяющие в простейшей форме продемонстрировать мощь и эффективность нескольких стандартных приёмов – применение формулы Даламбера, метода Фурье, метода интегральных преобразований, формул Пуассона.

Данное пособие предназначено для студентов факультета К, однако оно будет полезно всем, кто приступает к изучению курса математической физики.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. О.В. Нагорнов

ISBN 978–5–7262–0856–5

© Московский инженерно-физический институт
(государственный университет), 2007

Оглавление

1. Основные уравнения математической физики	5
1.1. Уравнение колебаний	5
1.2. Уравнение теплопроводности	6
1.3. Стационарные уравнения	7
2. Основные задачи для уравнений математической физики	8
2.1. Задача Коши	8
2.2. Виды краевых условий	9
2.3. Задача Дирихле для стационарного уравнения	10
2.4. Задача Неймана для стационарного уравнения	11
2.5. Третья краевая задача	12
2.6. Начально-краевые задачи	12
3. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений в частных производных 2-го порядка	16
3.1. Классификация линейных УЧП 2-го порядка с двумя независимыми переменными	16
3.2. Приведение к каноническому виду УЧП 2-го порядка с двумя независимыми переменными	17
3.3. Приведение к каноническому виду УЧП 2-го порядка с постоянными коэффициентами	20
3.4. Примеры решения задач	22
3.5. Избавление от младших производных	27
4. Задача Коши для волнового уравнения. Формула Даламбера	28
4.1. Общее решение уравнения колебаний	28
4.2. Формула Даламбера	30
4.3. Примеры решения задач	32
5. Волновое уравнение на полупрямой	39
5.1. Метод продолжения	39
5.2. Примеры решения задач	40
5.3. Метод характеристик	48
5.4. Примеры решения задач	49
6. Уравнение теплопроводности на прямой и полупрямой	54
6.1. Формула Пуассона	54
6.2. Примеры решения задач	54
7. Метод Фурье для однородных уравнений на отрезке $[0, l]$	64
7.1. Разложение функции в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля	64
7.2. Примеры решения задач	65
8. Метод Фурье для неоднородных уравнений	83

9. Метод Фурье в случае неоднородных краевых условий	98
9.1. Сведение неоднородных краевых условий к однородным	98
9.2. Примеры решения задач	100
10. Метод Фурье в прямоугольнике	105
10.1. Примеры решения задач	105
11. Уравнение Лапласа в круге и вне круга	115
11.1. Уравнение Лапласа в полярных координатах	115
11.2. Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге	118
11.3. Примеры решения задач	120
11.4. Внешняя задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге	124
11.5. Внутренняя задача Неймана для уравнения Лапласа в круге . . .	128
11.6. Внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа в круге	129
11.7. Внутренняя задача III-го рода для уравнения Лапласа в круге . .	131
12. Внешняя задача III-го рода для уравнения Лапласа в круге	133
13. Уравнение Лапласа в кольце	135
13.1. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце	135
13.2. Задача Неймана для уравнения Лапласа в кольце	139
13.3. Задача III-го рода для уравнения Лапласа в кольце	142
14. Интеграл Пуассона	147
Предметный указатель	150
Список литературы	151

1. Основные уравнения математической физики

В математической физике возникают самые разнообразные дифференциальные уравнения, описывающие различные физические процессы. Целью нашего курса является изучение трёх основных уравнений: уравнения колебаний, уравнения теплопроводности и уравнения, которое мы пока будем называть стационарным уравнением.

Всюду ниже предполагаются выполненными условия:

$$c(x) \geq c_0 = \text{const} > 0, \quad \rho(x) \geq \rho_0 = \text{const} > 0, \quad k(x) \geq k_0 = \text{const} > 0. \quad (1.1)$$

1.1. Уравнение колебаний

Определение 1.1. Уравнением колебаний (волновым уравнением) называется уравнение вида:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \text{div} (k(x) \text{grad} u) + q(x, t)u = F(x, t), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (1.2)$$

в котором ρ , p , q , F – заданные функции, а $u(x, t)$ – искомая функция, и для функций $\rho(x)$ и $k(x)$ выполнены условия (1.1).

В случае, когда пространство x одномерно, уравнение принимает вид:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q(x, t)u = F(x, t), \quad x = (x_1, \dots, x_n). \quad (1.3)$$

Если $F(x, t) \equiv 0$, то уравнение (1.2) называется **однородным**, в противном случае – **неоднородным**.

Выражение $\text{div} (k(x) \text{grad} u)$ в n -мерном пространстве переменных x понимается следующим образом:

$$\text{div} (k(x) \text{grad} u) = \sum_{m=1}^n \frac{\partial}{\partial x_m} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x_m} \right).$$

В частном случае, когда $k = k_0 = \text{const}$ и её можно вынести за знак производных и суммы, получаем:

$$\text{div} (k_0 \text{grad } u) = k_0 \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = k_0 \Delta u.$$

Уравнение (1.2) описывает, в частности, малые поперечные колебания струны (а при двумерном пространстве x – колебания мембраны), малые продольные колебания упругого стержня, электрические колебания в проводах. На примере уравнения поперечных колебаний струны рассмотрим смысл всех входящих в него функций.

- Искомая функция $u(x, t)$ представляет собой величину отклонения струны в точке x в момент времени t от её равновесного положения.
- Функция $\rho(x)$ имеет смысл линейной плотности струны (то есть $\rho(x)dx$ равняется массе кусочка струны длины dx в точке x).
- Функция $k(x)$ задаёт натяжение струны (а в случае продольных колебаний стержня постоянного сечения – модуль Юнга в точке x).
- Функция $q(x, t)$ определяет сопротивление среды и задаёт уровень затухания колебаний.
- Функция $F(x, t)$ называется «правой частью» и представляет собой внешнюю силу, действующую на струну.

В простейшем случае, когда $\rho(x) = \rho_0 = \text{const} > 0$, $k(x) = k_0 = \text{const} > 0$, $\frac{k_0}{\rho_0} = a^2 = \text{const} > 0$, $q \equiv 0$, уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x, t), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad n = 1, \quad (1.5)$$

где функция правой части $f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho_0}$.

Замечание 1.1. Уравнения (1.4) – (1.5) также часто называют **волновым уравнением**.

1.2. Уравнение теплопроводности

Определение 1.2. Уравнением теплопроводности называется уравнение вида:

$$c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div} (k(x)\text{grad } u) = F(x, t), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (1.6)$$

в котором ρ , k , F – заданные функции, а $u(x, t)$ – искомая функция и для функций $c(x)$, $\rho(x)$ и $k(x)$ выполнены условия (1.1).

В случае, когда пространство x одномерно, уравнение принимает вид:

$$c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = F(x, t), \quad x = (x_1, \dots, x_n). \quad (1.7)$$

Если $F(x, t) \equiv 0$, то уравнение (1.6) называется **однородным**, в противном случае – **неоднородным**.

Уравнение (1.6) описывает, в частности, распространение тепла в тонком стержне, тонкой мембране или объёмном теле, диффузию вещества. На примере распространения тепла в тонком стержне рассмотрим смысл всех входящих в уравнение функций.

- Искомая функция $u(x, t)$ представляет собой температуру стержня в точке x в момент времени t .
- Функция $\rho(x)$ имеет смысл линейной плотности стержня.
- Функция $c(x)$ есть удельная теплоёмкость.
- $k(x)$ – коэффициент теплопроводности в точке x .
- Функция $F(x, t)$ называется «правой частью» и представляет собой плотность источников тепла.

В простейшем случае, когда $c(x) = c_0 = \text{const} > 0$, $\rho(x) = \rho_0 = \text{const} > 0$, $\frac{k(x)}{c_0\rho_0} = a^2 = \text{const} > 0$, уравнение принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, t), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad n = 1, \quad (1.9)$$

где функция правой части $f(x, t) = \frac{F(x, t)}{c_0\rho_0}$.

Замечание 1.2. Уравнения (1.8) – (1.9) также часто называют **уравнением теплопроводности**.

1.3. Стационарные уравнения

Если уравнения колебаний или теплопроводности описывают процесс, установившийся во времени, и никакие входящие в уравнения функции уже от времени не зависят, то производные по времени $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ обращаются в нуль, и уравнение принимает вид:

$$-\text{div} (k(x)\text{grad } u) + q(x)u = F(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n). \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) описывает, в частности, стационарное распределение тепла в тонком стрержне, тонкой мембране или объёмном теле, установившуюся концентрацию вещества, равновесное положение мембраны по действию внешней постоянной силы и т.п. Смысл всех входящих в уравнение функций наследуется из нестационарного уравнения, из которого оно получилось. В простейшем случае, когда

$$k(x) = a^2 = \text{const} > 0, \quad q(x) \equiv 0,$$

уравнение принимает вид уравнения Лапласа или Пуассона.

Определение 1.3. Уравнением Лапласа называется уравнение вида:

$$\Delta u = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (1.11)$$

в котором $u(x, t)$ – искомая функция.

Уравнением Пуассона называется уравнение вида:

$$\Delta u = f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (1.12)$$

в котором $f = -\frac{F(x)}{a^2}$ – заданная функция, а $u(x, t)$ – искомая функция.

2. Основные задачи для уравнений математической физики

2.1. Задача Коши

Пусть

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in (-\infty, +\infty)\}, \\ Q &= \Omega \times (0, +\infty) = \{(x, t) \mid x \in \Omega, t > 0\}, \\ Q^* &= \Omega \times [0, +\infty) = \{(x, t) \mid x \in \Omega, t \geq 0\}. \end{aligned}$$

Определение 2.1. Задачей Коши для уравнения колебаний называется задача нахождения функции $u(x, t) \in C^2(Q) \cap C(Q^*)$ из условий:

$$\begin{cases} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \text{div} (k(x) \text{grad } u) + q(x, t)u = F(x, t), & (x, t) \in Q; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные функции, называемые **начальными данными** или **данными Коши**, а для заданных функций $\rho(x)$, $k(x)$, $q(x, t)$ и $F(x, t)$ выполнены условия (1.1) и

$$\rho, \varphi, \psi \in C(\Omega), \quad k \in C^1(\Omega), \quad q, F \in C(Q^*).$$

Аналогично определяется задача Коши для уравнения теплопроводности.

Определение 2.2. Задачей Коши для уравнения теплопроводности называется задача нахождения функции $u(x, t) \in C^{2,1}(Q) \cap C(Q^*)$ из условий:

$$\begin{cases} c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} (k(x)\operatorname{grad} u) = F(x, t), & (x, t) \in Q; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $\varphi(x)$ – заданная функция, называемая **начальными данными** или **данными Коши**, а для заданных функций $c(x)$, $\rho(x)$, $k(x)$ и $F(x, t)$ выполнены условия (1.1) и:

$$c, \rho, \varphi \in C(\Omega), \quad k \in C^1(\Omega), \quad F \in C(Q^*).$$

2.2. Виды краевых условий

Перейдём к рассмотрению уравнений в ограниченных областях. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in C^2$.

Тогда поведение решения уравнения будет, очевидно зависеть от того, что с ним происходит на границе. Например, края колеблющейся мембраны можно закрепить, отпустить или закрепить упруго (на пружинках).

Определение 2.3. Краевым (граничным) условием I-го рода называется условие:

$$u(x, t) \Big|_{\partial\Omega} = \mu(x, t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0 \quad (2.3)$$

с заданной функцией $\mu(x, t)$.

Краевым (граничным) условием II-го рода называется условие:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = \nu(x, t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (2.4)$$

где $\vec{n}$ – внешняя единичная нормаль к поверхности $\partial\Omega$, а функция $\nu(x, t)$ задана.

Краевым (граничным) условием III-го рода называется условие:

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \beta u \right) \Big|_{\partial\Omega} = \chi(x, t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0 \quad (2.5)$$

с заданной функцией $\chi(x, t)$. При этом $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Краевое условие называется **однородным**, если функция в его правой части (μ , ν или χ) равна всюду нулю, и **неоднородным** в противном случае.

Замечание 2.1. Краевое условие III-го рода является наиболее общим, так как при $\alpha = 0$ оно превращается в условие I-го рода, а при $\beta = 0$ – в условие II-го рода. Заметим также, что α и β могут быть функциями.

Определение 2.4. Однородное граничное условие I-го рода называют **условием Дирихле**:

$$u(x, t) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0. \quad (2.6)$$

Однородное граничное условие II-го рода называют **условием Неймана**:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0. \quad (2.7)$$

Замечание 2.2. Неоднородное краевое условие I-го рода также иногда называют условием Дирихле, а неоднородное краевое условие II-го рода – условием Неймана.

Условие I-го рода в случае уравнения колебаний имеет смысл **жёстко закреплённого края**, условие Неймана – **свободного края**, а условие III-го рода – **края, закреплённого упруго**.

В случае уравнения теплопроводности условие I-го рода означает **край, на котором поддерживается заданная температура**, условие Неймана – **теплоизолированный край**, а условие III-го рода – **край, на котором происходит конвективный теплообмен с окружающей средой**.

2.3. Задача Дирихле для стационарного уравнения

Если рассмотреть ограниченную струну, мембрану или ёмкость, где происходила диффузия или теплообмен, то естественно предположить, что решение уравнения будет зависеть от того, что происходит на границе данного тела. К примеру, форма мембраны не может не зависеть от её же профиля на границе. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in C^3$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ – её замыкание.

Пусть заданы функции $k(x)$, $q(x)$ и $F(x)$, для которых выполнены условия (1.1),

$$q(x) \geq 0, \quad k \in C^1(\Omega), \quad q, F \in C(\Omega).$$

Определение 2.5. Задачей Дирихле для стационарного уравнения (граничной задачей I-го рода) называется задача нахождения функции $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ из условий:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} (k(x)\operatorname{grad} u) + q(x)u = F(x), & x \in \Omega; \\ u(x) = \mu(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.8)$$

где $\mu(x)$ – заданная непрерывная функция, называемая **данными Дирихле**. В случае одной пространственной переменной задача принимает вид:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} (k(x)\frac{\partial u}{\partial x}) + q(x)u = F(x), & x \in (0, l); \\ u(0) = u_0, \\ u(l) = u_1. \end{cases} \quad (2.9)$$

В самом простом случае, когда $k(x) \equiv a^2 = \text{const} > 0$, $q(x) \equiv 0$, $n = 1$, получим краевую задачу I-го рода для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) = -F(x), & x \in \Omega; \\ u(x) = \mu(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.10)$$

а если и $F \equiv 0$, то задачу Дирихле для уравнения Лапласа.

2.4. Задача Неймана для стационарного уравнения

Кроме условий Дирихле, на границе могут быть условия других видов. Например, пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in C^3$, а $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ — её замыкание.

Определение 2.6. Задачей Неймана для стационарного уравнения (граничной задачей II-го рода) называется задача нахождения функции $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ из условий:

$$\begin{cases} -\text{div} (k(x)\text{grad } u) + q(x)u = F(x), & x \in \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = \nu(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.11)$$

где $\vec{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности Ω , $\nu(x)$ — заданная непрерывная функция, называемая **данными Неймана**, а для заданных функций $k(x)$, $q(x)$ и $F(x)$ выполнены условия (1.1) и:

$$q(x) \geq 0, \quad k \in C^1(\Omega), \quad q, F \in C(\Omega).$$

В случае одной пространственной переменной задача принимает вид:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} (k(x)\frac{\partial u}{\partial x}) + q(x)u = F(x), & x \in (0, l); \\ u'(0) = u_0, \\ u'(l) = u_1. \end{cases} \quad (2.12)$$

В самом простом случае, когда $k(x) \equiv a^2 = \text{const} > 0$, $q(x) \equiv 0$, $n = 1$, получим краевую задачу II-го рода для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) = -F(x), & x \in \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = \nu(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.13)$$

а если и $F \equiv 0$, — задачу Неймана для уравнения Лапласа.

Замечание 2.3. Условие II-го рода в одномерном случае принимает вид

$$u'(0) = u_0, \quad u'(l) = u_1$$

в силу того факта, что под нормалью к границе в случае одномерной ограниченной области (отрезка) понимается вектор, направленный вправо, на правом конце отрезка, и вектор, направленный влево, на левом его конце, откуда:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(0) = -u'(0), \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(l) = u'(l).$$

2.5. Третья краевая задача

Рассмотрим задачу с краевыми условиями еще одного вида.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in C^3$,
 $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ — её замыкание.

Определение 2.7. Краевой задачей III-го рода называется задача нахождения функции $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ из условий:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} (k(x)\operatorname{grad} u) + q(x)u = F(x), & x \in \Omega; \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) + \beta u(x) = \chi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.14)$$

где $\vec{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности Ω , $\chi(x)$ — заданная непрерывная функция, называемая **функцией краевого условия**, выполнено неравенство $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, а для заданных функций $k(x)$, $q(x)$ и $F(x)$ выполняются условия (1.1) и:

$$q(x) \geq 0, \quad k \in C^1(\Omega), \quad q, F \in C(\Omega).$$

В случае одной пространственной переменной задача принимает вид:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q(x)u = F(x), & x \in (0, l); \\ -\alpha u'(0) + \beta u(0) = u_0, \\ \alpha u'(l) + \beta u(l) = u_1. \end{cases} \quad (2.15)$$

(Минус перед α во второй строчке возник в силу рассуждений, приведённых в замечании 2.3.)

В самом простом случае, когда $k(x) \equiv a^2 = \operatorname{const} > 0$, $q(x) \equiv 0$, $n = 1$, получим краевую задачу III-го рода для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) = -F(x), & x \in \Omega; \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) + \beta u(x) = \chi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.16)$$

а если и $F \equiv 0$, — задачу III-го рода для уравнения Лапласа.

2.6. Начально-краевые задачи

Наконец, если нестационарный процесс колебаний или теплообмена происходит в ограниченной области, для корректной постановки задач нам потребуются как данные Коши, так и краевые условия.

Пусть

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in C^3$;

$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ — её замыкание;

$$Q = \Omega \times (0, +\infty) = \{(x, t) \mid x \in \Omega, t > 0\};$$

$$Q^* = \Omega \times [0, +\infty) = \{(x, t) \mid x \in \Omega, t \geq 0\};$$

$$\bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0, +\infty) = \{(x, t) \mid x \in \bar{\Omega}, t \geq 0\}.$$

Определение 2.8. Начально-краевой задачей для уравнения колебаний называется задача нахождения функции $u(x) \in C^2(Q) \cap C(Q^*)$ из условий:

$$\begin{cases} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div} (k(x) \operatorname{grad} u) + q(x, t)u = F(x, t), & (x, t) \in Q; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \Omega; \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in (0, l); \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), & x \in \Omega, \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n}(x) + \beta u(x) = \chi(x, t), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.17)$$

где $\chi(x, t)$ – заданная непрерывная функция, называемая **функцией краевого условия**, $\varphi(x), \psi(x) \in C(\bar{\Omega})$ – **данные Коши**, выполнено неравенство $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, а для заданных функций $\rho(x), k(x), q(x)$ и $F(x, t)$ выполнены условия (1.1) и:

$$\rho \in C(\bar{\Omega}), \quad k \in C^1(\bar{\Omega}), \quad q, F \in C(\bar{Q}).$$

В случае одной пространственной переменной задача принимает вид:

$$\begin{cases} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (k(x) \frac{\partial u}{\partial x}) + q(x, t)u = F(x, t), & x \in (0, l); \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in (0, l); \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in (0, l); \\ -\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(0) + \beta u(0) = \mu(t), \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(l) + \beta u(l) = \nu(t). \end{cases} \quad (2.18)$$

В случае, когда $\alpha = 0$ получаем I-ю начально-краевую задачу, в случае $\beta = 0$ – II-ю, а при $\alpha \cdot \beta \neq 0$ – III-ю.

В самом простом случае, когда краевые условия I-го рода,

$$\rho(x) = \rho_0 = \operatorname{const} > 0, \quad \frac{k(x)}{\rho_0} \equiv a^2 = \operatorname{const} > 0, \quad q(x) \equiv 0,$$

получим I-ую начально-краевую задачу для волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho_0}, & x \in \Omega; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \Omega; \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \Omega; \\ u(x, t) = \mu(t), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.19)$$

Определение 2.9. Пусть $\Omega, \bar{\Omega}, Q$ и Q^* такие же, как в определении 2.8. **Начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности** называется задача нахождения функции $u(x) \in C^{2,1}(Q) \cap C(Q^*)$ из условий:

$$\begin{cases} c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} (k(x) \operatorname{grad} u) = F(x, t), & (x, t) \in Q; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \Omega; \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n}(x) + \beta u(x) = \chi(x, t), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.20)$$

где $\chi(x, t)$ – заданная непрерывная функция, называемая **функцией краевого условия**, выполнено неравенство $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\varphi(x) \in C(\overline{\Omega})$ – **данные Коши**, а для заданных функций $c(x)$, $\rho(x)$, $k(x)$ и $F(x, t)$ выполнены условия (1.1) и

$$c(x) \geq c_0 > 0, \quad \rho(x) \geq \rho_0 > 0,$$

$$k(x) \geq k_0 > 0, \quad \rho \in C(\overline{\Omega}), \quad k \in C^1(\overline{\Omega}), \quad F \in C(\overline{Q}).$$

В случае одной пространственной переменной задача принимает вид:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q(x)u = F(x), & x \in (0, l); \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in (0, l); \\ -\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(0) + \beta u(0) = \mu(t), & t > 0; \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(l) + \beta u(l) = \nu(t) & t > 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

В случае, когда $\alpha = 0$ получаем I-ю начально-краевую задачу, в случае $\beta = 0$ – II-ю, а при $\alpha \cdot \beta \neq 0$ – III-ю.

В самом простом случае, когда краевые условия I-го рода,

$$c(x) = c_0 = \text{const} > 0, \quad \rho(x) = \rho_0 = \text{const} > 0, \quad \frac{k(x)}{c_0 \rho_0} \equiv a^2 = \text{const} > 0,$$

получим I-ую начально-краевую задачу вида:

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = f(x, t) = \frac{F(x, t)}{c_0 \rho_0}, & x \in \Omega; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \Omega; \\ u(x, t) = \mu(t), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.22)$$

Пример 2.1. Поставить начально-краевую задачу для уравнения колебаний струны на отрезке $x \in [0, l]$ с начальным отклонением $\varphi(x)$, нулевой начальной скоростью струны и однородными краевыми условиями

- I-го рода на левом конце;
- II-го рода на правом.

Уравнение колебаний на отрезке $[0, l]$ принимает вид:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q(x, t)u = F(x, t), \quad x \in (0, l).$$

Начальное отклонение $\varphi(x)$ означает, что

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (0, l).$$

Начальная скорость равна нулю, то есть

$$u_t(x, 0) = 0, \quad x \in (0, l).$$

Однородное краевое условие I-го рода на левом конце (при $x = 0$) имеет вид:

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0,$$

а однородное краевое условие II-го рода на правом конце (при $x = l$), соответственно, вид:

$$u_x(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Собрав все эти условия воедино, получаем задачу:

Найти функцию $u(x) \in C^2(Q) \cap C(Q^*)$, где Q и Q^* заданы в определении 2.8, из условий:

$$\begin{cases} \rho(x) u_{tt} - (k(x)u_x)_x + q(x, t)u = F(x, t), & x \in (0, l); \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in (0, l); \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in (0, l); \\ u(0, t) = 0, & t > 0; \\ u_x(l, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

где $\varphi(x), \psi(x) \in C[0, l]$, а для заданных функций $\rho(x), k(x), q(x)$ и $F(x, t)$ выполнены обычные условия:

$$\rho(x) \geq \rho_0 > 0, \quad k(x) \geq k_0 > 0,$$

$$\rho \in C[0, l], \quad k \in C^1[0, l], \quad q, F \in C([0, l] \times [0, +\infty)).$$

Пример 2.2. Поставить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке $x \in [0, l]$ с начальным распределением температуры $\varphi(x)$ и однородными краевыми условиями

- III-го рода на левом конце;
- I-го рода на правом.

Уравнение теплопроводности на отрезке $[0, l]$ принимает вид:

$$c(x)\rho(x) u_t - (k(x)u_x)_x = F(x, t), \quad x \in (0, l).$$

Начальное распределением температуры $\varphi(x)$ означает, что

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (0, l).$$

Однородное краевое условие III-го рода на левом конце (при $x = 0$) имеет вид:

$$-\alpha u_x(0, t) + \beta u(0, t) = 0, \quad t > 0,$$

а однородное краевое условие I-го рода на правом конце (при $x = l$), соответственно, вид:

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Собрав все эти условия воедино, получаем задачу:

Найти функцию $u(x) \in C^{2,1}(Q) \cap C(Q^*)$, где Q и Q^* заданы в определении 2.8, из условий:

$$\begin{cases} c(x)\rho(x)u_{tt} - (k(x)u_x)_x = F(x, t), & x \in (0, l); \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in (0, l); \\ -\alpha u_x(0, t) + \beta u(0, t) = 0 = 0, & t > 0; \\ u(l, t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

где α, β – заданные числа, $\varphi(x) \in C[0, l]$, а для заданных функций $c(x), \rho(x), k(x)$ и $F(x, t)$ выполнены обычные условия:

$$\begin{aligned} c(x) \geq c_0 > 0, \quad \rho(x) \geq \rho_0 > 0, \quad k(x) \geq k_0 > 0, \\ \rho \in C[0, l], \quad k \in C^1[0, l], \quad F \in C([0, l] \times [0, +\infty)). \end{aligned}$$

3. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений в частных производных 2-го порядка

3.1. Классификация линейных УЧП 2-го порядка с двумя независимыми переменными

Рассмотрим общее УЧП 2-го порядка с двумя независимыми переменными:

$$F(x, y; u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

Его частным случаем является **квазилинейное уравнение**

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + f(x, y; u, u_x, u_y) = 0.$$

Мы же будем изучать в основном ещё более частный случай – **линейное уравнение**

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f(x, y), \quad (3.1)$$

где коэффициенты a_{ij}, b_i, c являются, вообще говоря, функциями от (x, y) .

Определение 3.1. Характеристической квадратичной формой уравнения (3.1) называется выражение

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2. \quad (3.2)$$

Выражение

$$\Delta = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \quad (3.3)$$

называется **дискриминантом квадратичной формы** (3.2).

Определение 3.2. Уравнение (3.1) относится к

- 1) **гиперболическому типу**, если $\Delta > 0$;
- 2) **эллиптическому типу**, если $\Delta < 0$;
- 3) **параболическому типу**, если $\Delta = 0$.

Замечание 3.1. В случае, когда коэффициенты a_{ij} , b_i , c являются функциями от (x, y) , дискриминант Δ также есть функция от (x, y) . Поэтому уравнение с переменными коэффициентами может в разных областях плоскости $\mathbb{R}^2$ иметь разный тип.

Замечание 3.2. Тип уравнения не изменяется при невырожденной замене переменных

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y); \\ \eta = \eta(x, y). \end{cases}$$

Определение 3.3. Каноническим видом уравнения

1) гиперболического типа называется вид

$$\begin{aligned} v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \beta_1 v_\xi + \beta_2 v_\eta + \gamma v &= g(\xi, \eta), \quad \text{либо} \\ v_{\xi\eta} + \beta_1 v_\xi + \beta_2 v_\eta + \gamma v &= g(\xi, \eta); \end{aligned}$$

2) эллиптического типа называется вид

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \beta_1 v_\xi + \beta_2 v_\eta + \gamma v = g(\xi, \eta);$$

3) параболического типа называется вид

$$v_{\eta\eta} + \beta_1 v_\xi + \beta_2 v_\eta + \gamma v = g(\xi, \eta).$$

3.2. Приведение к каноническому виду УЧП 2-го порядка с двумя независимыми переменными

Алгоритм.

1) Находим Δ , определяем тип уравнения.

2) Находим первые интегралы **характеристических уравнений**:

$$\text{в случае, когда } a_{11} \neq 0: \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}};$$

$$\text{в случае, когда } a_{22} \neq 0: \quad \frac{dx}{dy} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{22}}.$$

3) Первые интегралы имеют вид:

$$\text{в случае гиперболического типа:} \quad \varphi(x, y) = c, \quad \psi(x, y) = c;$$

$$\text{в случае эллиптического типа:} \quad \alpha(x, y) \pm i\beta(x, y) = c;$$

$$\text{в случае параболического типа:} \quad \delta(x, y) = c.$$

4) Делаем замену переменных:

$$\text{в случае гиперболического типа:} \quad \begin{cases} \xi = \varphi(x, y); \\ \eta = \psi(x, y); \end{cases}$$

$$\text{в случае эллиптического типа:} \quad \begin{cases} \xi = \alpha(x, y); \\ \eta = \beta(x, y); \end{cases}$$

$$\text{в случае параболического типа:} \quad \begin{cases} \xi = \delta(x, y); \\ \eta = \varepsilon(x, y), \end{cases},$$

где $\varepsilon(x, y)$ – любая функция из C^1 , такая, что $\begin{vmatrix} \delta_x & \delta_y \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y \end{vmatrix} \neq 0$.

Результатом произведённой замены будет канонический вид уравнения.

№ 91¹. Привести к каноническому виду в каждой области, где сохраняется тип, уравнение

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Шаг 1. Ищем дискриминант.

Так как в нашем случае $a_{11} = y$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$, то

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y.$$

Поэтому

а) в полуплоскости $y < 0$ дискриминант $\Delta > 0 \Rightarrow$ гиперболический тип;

б) в полуплоскости $y > 0$ дискриминант $\Delta < 0 \Rightarrow$ эллиптический тип;

в) на прямой $y = 0$ дискриминант $\Delta = 0 \Rightarrow$ параболический тип.

Шаг 2. Составим характеристические уравнения.

Так как $a_{22} = 1 \neq 0$, характеристические уравнения имеют вид:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{22}}, \quad \text{то есть} \quad \frac{dx}{dy} = \pm \sqrt{-y}. \quad (3.4)$$

Это – уравнения с разделяющимися переменными. Решаем их:

а) в полуплоскости $y < 0$

$$dx = \pm \sqrt{-y} dy \quad \Rightarrow \quad x + c = \mp \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}.$$

Поэтому первые интегралы имеют вид:

$$\boxed{\varphi(x, y) = x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}} = c, \quad \boxed{\psi(x, y) = x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}} = c; \quad (3.5)$$

б) в полуплоскости $y > 0$

$$dx = \pm i \sqrt{y} dy \quad \Rightarrow \quad x + c = \pm i \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}.$$

Поэтому первые интегралы имеют вид:

$$\alpha(x, y) \pm i \beta(x, y) = c, \quad \text{где} \quad \boxed{\alpha(x, y) = x}, \quad \boxed{\beta(x, y) = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}}; \quad (3.6)$$

¹Здесь и далее задачи берутся из задачника [1].

в) на прямой $y = 0$

$$dx = 0 \cdot dy \quad \Rightarrow \quad x = c.$$

Поэтому первый интеграл (единственный линейно независимый) имеет вид:

$$\boxed{\delta(x, y) = x.} \quad (3.7)$$

Шаг 3. Замена переменных.

В соответствии с алгоритмом, необходимо произвести замену:

а) в полуплоскости $y < 0$

$$\begin{cases} \xi = x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}; \\ \eta = x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Тогда, введя функцию $v(\xi, \eta)$, получаем:

$$u_x = v_\xi + v_\eta, \quad u_y = (-v_\xi + v_\eta) \sqrt{-y},$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, \quad u_{yy} = -y(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) - \frac{1}{2\sqrt{-y}}(-v_\xi + v_\eta).$$

Подставив найденные производные в исходное уравнение, получаем:

$$\begin{aligned} yu_{xx} + u_{yy} &= y(v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) - y(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) - \frac{1}{2\sqrt{-y}}(-v_\xi + v_\eta) = \\ &= y \left[4v_{\xi\eta} - \frac{1}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}(-v_\xi + v_\eta) \right] = 0. \end{aligned}$$

Поделив на $4y$ и выразив $2(-y)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}(\xi - \eta)$, получаем канонический вид:

$$v_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}(-v_\xi + v_\eta) = 0.$$

б) в полуплоскости $y > 0$

$$\begin{cases} \xi = x; \\ \eta = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Тогда, введя функцию $v(\xi, \eta)$, получаем:

$$u_x = v_\xi, \quad u_y = v_\eta \sqrt{y},$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi}, \quad u_{yy} = v_{\eta\eta} y + \frac{1}{2\sqrt{y}} v_\eta.$$

Подставив найденные производные в исходное уравнение, получаем:

$$\begin{aligned} yu_{xx} + u_{yy} &= y(v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} v_\eta = y \left(v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}} v_\eta \right) = \\ &= \left[2y^{\frac{3}{2}} = 3\eta \right] = y \left(v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta} v_\eta \right) = 0. \end{aligned}$$

Поделив на y , получаем канонический вид:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta} v_\eta = 0.$$

в) на прямой $y = 0$

$$\begin{cases} \xi = x; \\ \eta = y. \end{cases}$$

(Нам надо было произвольным образом выбрать $\eta(x, y)$ так, чтобы функции ξ, η образовывали линейно независимую пару.)

Введя функцию $v(\xi, \eta)$, получаем:

$$u_x = v_\xi, \quad u_y = v_\eta, \quad u_{xx} = v_{\xi\xi}, \quad u_{yy} = v_{\eta\eta}.$$

Подставив найденные производные в исходное уравнение при $y = 0$, получаем:

$$u_{yy} = v_{\eta\eta} = 0.$$

Итак, канонический вид исходного уравнения на прямой $y = 0$:

$$v_{\eta\eta} = 0 \quad \text{или, что то же самое,} \quad u_{yy} = 0.$$

Ответ:

$$\begin{cases} v_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi-\eta)} (-v_\xi + v_\eta) = 0 & \text{в области } y < 0, \quad \text{гиперболический тип;} \\ v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta} v_\eta = 0 & \text{в области } y > 0, \quad \text{эллиптический тип;} \\ u_{yy} = 0 & \text{в области } y = 0, \quad \text{параболический тип.} \end{cases}$$

При этом

$$\begin{cases} \xi = y - x + 2\sqrt{x}, & \eta = y - x - 2\sqrt{x} & \text{в области } y < 0; \\ \xi = y - x, & \eta = 2\sqrt{-x} & \text{в области } y > 0; \\ \xi = x, & \eta = y & \text{в области } y = 0. \end{cases}$$

3.3. Приведение к каноническому виду УЧП 2-го порядка с постоянными коэффициентами

В этом параграфе мы будем рассматривать УЧП 2-го порядка с постоянными коэффициентами и n независимыми переменными:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + f(x_1, \dots, x_n; u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0, \quad (3.8)$$

$$a_{ij} = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Определение 3.4. Характеристической квадратичной формой уравнения (3.8) называется выражение:

$$Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j. \quad (3.9)$$

Нормальным видом квадратичной формы (3.9) называется её вид

$$\tilde{Q}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \sum_{k=1}^n \beta_k \mu_k^2, \quad \beta_k \in \{-1, 0, 1\}. \quad (3.10)$$

Каноническим видом уравнения (3.8) называется вид, в котором его характеристическая квадратичная форма принимает нормальный (или канонический) вид:

$$\sum_{k=1}^n \beta_k u_{x_k x_k} + g(x_1, \dots, x_n; u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0. \quad (3.11)$$

Определение 3.5. Уравнение (3.8) относится к

- 1) **гиперболическому типу**, если все коэффициенты β_k отличны от нуля и не все одного знака;
- 2) **эллиптическому типу**, если все коэффициенты β_k отличны от нуля и все одного знака;
- 3) **параболическому типу**, если хотя бы один из коэффициентов β_k равен нулю.

Алгоритм.

- 1) Приводим характеристическую квадратичную форму к каноническому (нормальному) виду (3.10) (методом выделения полных квадратов). Выписываем матрицу преобразования, осуществляющую этот процесс:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \vdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \vdots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \vdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0. \quad (3.12)$$

- 2) Находим матрицу Γ замены переменных по закону

$$\Gamma = (A^T)^{-1}. \quad (3.13)$$

- 3) Производим замену переменных:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \vdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \vdots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \vdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}}_\Gamma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Результатом произведённой замены будет канонический вид (3.11) уравнения (3.8).

3.4. Примеры решения задач

№ 119. Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xy} - 2u_{xz} + u_{yz} + u_x + \frac{1}{2}u_y = 0.$$

Шаг 1. Характеристическая квадратичная форма данного уравнения имеет вид

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3.$$

Приведём её к каноническому виду:

$$\begin{aligned} Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \begin{bmatrix} \nu_1 = \lambda_1 + \lambda_2; \\ \nu_2 = \lambda_1 - \lambda_2; \\ \nu_3 = \lambda_3 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{4}(\nu_1^2 - \nu_2^2) - (\nu_1 + \nu_2)\nu_3 + \frac{1}{2}(\nu_1 - \nu_2)\nu_3 = \frac{1}{4}(\nu_1^2 - \nu_2^2) - \frac{1}{2}\nu_1\nu_3 - \frac{3}{2}\nu_2\nu_3 = \\ &= \frac{1}{4}(\nu_1^2 - 2\nu_1\nu_3 + \nu_3^2) - \frac{1}{4}(\nu_2^2 + 6\nu_2\nu_3 + 9\nu_3^2) + 2\nu_3^2 = \\ &= \frac{1}{4}(\nu_1 - \nu_3)^2 - \frac{1}{4}(\nu_2 + 3\nu_3)^2 + 2\nu_3^2 = \frac{1}{4}\mu_1^2 - \frac{1}{4}\mu_2^2 + 2\mu_3^2 = \mu_1^2 - \mu_2^2 + \mu_3^2, \quad \text{где} \\ &\begin{cases} \mu_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3); \\ \mu_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3); \\ \mu_3 = \sqrt{2}\lambda_3 \end{cases} \quad \text{то есть} \quad \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Шаг 2. Найдём матрицу замены переменных Γ :

$$\Gamma = (A^T)^{-1} = -\frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Шаг 3. Осуществляем замену переменных:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{то есть} \quad \begin{cases} \xi = x + y; \\ \eta = x - y; \\ \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + 2y + z). \end{cases}$$

Чтобы подставить новые переменные в исходное уравнение, положим

$$v(\xi, \eta, \zeta) = u(x, y, z)$$

и найдём u_x , u_y , u_{xy} , u_{xz} , u_{yz} как производные сложной функции $v(\xi(x, y, z), \eta(x, y, z), \zeta(x, y, z))$:

$$u_x = v_\xi + v_\eta - \frac{\sqrt{2}}{2}v_\zeta, \quad u_y = v_\xi - v_\eta + \sqrt{2}v_\zeta;$$

$$u_{xy} = v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta} \cdot (-1) + v_{\eta\xi} \cdot 1 - v_{\eta\eta} + \frac{\sqrt{2}}{2}(v_{\xi\zeta} \cdot 2 + v_{\eta\zeta} \cdot 2) - \frac{\sqrt{2}}{2}(v_{\zeta\xi} - v_{\zeta\eta} + \sqrt{2}v_{\zeta\zeta}) \Rightarrow$$

$$u_{xy} = v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - v_{\zeta\zeta} + \frac{\sqrt{2}}{2}(v_{\xi\zeta} + 3v_{\eta\zeta});$$

$$u_{xz} = \frac{\sqrt{2}}{2}(v_{\xi\zeta} + v_{\eta\zeta}) - \frac{1}{2}v_{\zeta\zeta};$$

$$u_{yz} = \frac{\sqrt{2}}{2}(v_{\xi\zeta} - v_{\eta\zeta}) + v_{\zeta\zeta};$$

Подставляя найденные производные в левую часть исходного уравнения и приводя подобные, получаем:

$$\begin{aligned} u_{xy} - 2u_{xz} + u_{yz} + u_x + \frac{1}{2}u_y &= \left(v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - v_{\zeta\zeta} + \frac{\sqrt{2}}{2}(v_{\xi\zeta} + 3v_{\eta\zeta}) \right) - \\ &- 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(v_{\xi\zeta} + v_{\eta\zeta}) - \frac{1}{2}v_{\zeta\zeta} \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(v_{\xi\zeta} - v_{\eta\zeta}) + v_{\zeta\zeta} \right) + \\ &+ \left(v_\xi + v_\eta - \frac{\sqrt{2}}{2}v_\zeta \right) + \frac{1}{2} \left(v_\xi - v_\eta + \sqrt{2}v_\zeta \right) = v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} + \frac{3}{2}v_\xi + \frac{1}{2}v_\eta. \end{aligned}$$

Ответ: уравнение относится к гиперболическому типу,

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} + \frac{3}{2}v_\xi + \frac{1}{2}v_\eta = 0, \quad \text{где}$$

$$\xi = x + y; \quad \eta = x - y; \quad \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + 2y + z).$$

Замечание 3.3. Поскольку преобразование, приводящее квадратичную форму к нормальному виду, определено неоднозначно, то и замена переменных, приводящая уравнение к каноническому виду, также определено неоднозначно, поэтому правильных ответов много. Но в любом случае количество «плюсов», «минусов» и «нулей» при вторых производных не зависит от способа решения. Это – прямое следствие *закона инерции квадратичных форм*.

Замечание 3.4. Старшие коэффициенты уравнения в канонической форме совпадают с коэффициентами нормального вида квадратичной формы. Поэтому, строго говоря, можно было бы не вычислять и не подставлять u_{xy} , u_{xz} , u_{yz} в исходное уравнение, а подставить туда лишь младшие производные u_x , u_y . Однако проделанная полностью подстановка помогает находить ошибки, допущенные на предыдущих шагах.

№ 74. Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0.$$

Шаг 1. Характеристическая квадратичная форма данного уравнения имеет вид

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 5\lambda_2^2.$$

Приведём её к каноническому виду:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 5\lambda_2^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (2\lambda_2)^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2, \quad \text{где}$$

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2; \\ \mu_2 = 2\lambda_2, \end{cases} \quad \text{то есть} \quad \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Найдём матрицу замены переменных Γ :

$$\Gamma = (A^T)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Осуществляем замену переменных:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{то есть} \quad \begin{cases} \xi = x; \\ \eta = \frac{1}{2}(-x + y). \end{cases}$$

Чтобы подставить новые переменные в исходное уравнение, положим

$$v(\xi, \eta) = u(x, y)$$

и найдём $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ как производные сложной функции $v(\xi(x, y), \eta(x, y))$:

$$u_x = v_\xi - \frac{1}{2}v_\eta, \quad u_y = \frac{1}{2}v_\eta;$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} - v_{\xi\eta} + \frac{1}{4}v_{\eta\eta}, \quad u_{xy} = \frac{1}{2}v_{\xi\eta} - \frac{1}{4}v_{\eta\eta}, \quad u_{yy} = \frac{1}{4}v_{\eta\eta}.$$

Подставляя найденные производные в левую часть исходного уравнения и приводя подобные, получаем:

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = \left(v_{\xi\xi} - v_{\xi\eta} + \frac{1}{4}v_{\eta\eta} \right) + 2 \left(\frac{1}{2}v_{\xi\eta} - \frac{1}{4}v_{\eta\eta} \right) +$$

$$+ 5 \left(\frac{1}{4}v_{\eta\eta} \right) - 32v = v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - 32v.$$

Ответ: уравнение относится к эллиптическому типу,

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - 32v = 0, \quad \text{где} \quad \xi = x; \quad \eta = \frac{1}{2}(-x + y).$$

№ 75. Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0.$$

Шаг 1. Характеристическая квадратичная форма данного уравнения имеет вид

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2.$$

Приведём её к каноническому виду:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \mu_1^2 + 0 \cdot \mu_2^2, \quad \text{где}$$

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 - \lambda_2; \\ \mu_2 = \lambda_2, \end{cases} \quad \text{то есть} \quad \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

(В качестве μ_2 можно было взять любую линейную комбинацию λ_1 и λ_2 , такую чтобы матрица замены переменных была невырождена.)

Шаг 2. Найдём матрицу замены переменных Γ :

$$\Gamma = (A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Шаг 3. Осуществляем замену переменных:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{то есть} \quad \begin{cases} \xi = x; \\ \eta = x + y. \end{cases}$$

Чтобы подставить новые переменные в исходное уравнение, положим

$$v(\xi, \eta) = u(x, y)$$

и найдём $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ как производные сложной функции $v(\xi(x, y), \eta(x, y))$:

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi + v_\eta, & u_y &= v_\eta; \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, & u_{xy} &= v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, & u_{yy} &= v_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные производные в левую часть исходного уравнения и приводя подобные, получаем:

$$\begin{aligned} u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u &= (v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) - 2(v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) + (v_{\eta\eta}) + \\ &+ 9(v_\xi + v_\eta) + 9v_\eta - 9v = v_{\xi\xi} + 9v_\xi + 18v_\eta - 9v. \end{aligned}$$

Ответ: уравнение относится к параболическому типу,

$$v_{\xi\xi} + 9v_\xi + 18v_\eta - 9v = 0, \quad \text{где} \quad \xi = x; \quad \eta = x + y.$$

№ 76. Привести к каноническому виду уравнение:

$$2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = 0.$$

Шаг 1. Характеристическая квадратичная форма данного уравнения имеет вид

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = 2\lambda_1^2 + 3\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2.$$

Приведём её к каноническому виду:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = 2\lambda_1^2 + 3\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = \left(\frac{3}{2}\lambda_1 + \lambda_2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)^2 = \mu_1^2 - \mu_2^2, \quad \text{где}$$

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{3}{2}\lambda_1 + \lambda_2; \\ \mu_2 = \frac{1}{2}\lambda_1, \end{cases} \quad \text{то есть} \quad \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Найдём матрицу замены переменных Γ :

$$\Gamma = (A^T)^{-1} = -2 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Осуществляем замену переменных:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{то есть} \quad \begin{cases} \xi = y; \\ \eta = 2x - 3y. \end{cases}$$

Чтобы подставить новые переменные в исходное уравнение, положим

$$v(\xi, \eta) = u(x, y)$$

и найдём u_x , u_y , u_{xx} , u_{xy} , u_{yy} как производные сложной функции $v(\xi(x, y), \eta(x, y))$:

$$\begin{aligned} u_x &= 2v_\eta, & u_y &= v_\xi - 3v_\eta; \\ u_{xx} &= 4v_{\eta\eta}, & u_{xy} &= 2v_{\xi\eta} - 6v_{\eta\eta}, & u_{yy} &= v_{\xi\xi} - 6v_{\xi\eta} + 9v_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные производные в левую часть исходного уравнения и приводя подобные, получаем:

$$\begin{aligned} 2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u &= \\ = 2(4v_{\eta\eta}) + 3(2v_{\xi\eta} - 6v_{\eta\eta}) + (v_{\xi\xi} - 6v_{\xi\eta} + 9v_{\eta\eta}) + 7(2v_\eta) + 4(v_\xi - 3v_\eta) - 2v &= \\ &= v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + 4v_\xi + 2v_\eta - 2v. \end{aligned}$$

Ответ: уравнение относится к гиперболическому типу,

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + 4v_\xi + 2v_\eta - 2v = 0, \quad \text{где} \quad \xi = y; \quad \eta = 2x - 3y.$$

№ 77. Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0.$$

Шаг 1. Характеристическая квадратичная форма данного уравнения имеет вид

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2^2.$$

Приведём её к каноническому виду:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2^2 = \left(\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\lambda_2\right)^2 = \mu_1^2 - \mu_2^2, \quad \text{где}$$

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2; \\ \mu_2 = \frac{3}{2}\lambda_2, \end{cases} \quad \text{то есть} \quad \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Найдём матрицу замены переменных Γ :

$$\Gamma = (A^T)^{-1} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Осуществляем замену переменных:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{то есть} \quad \begin{cases} \xi = x; \\ \eta = \frac{-x+2y}{3}. \end{cases}$$

Чтобы подставить новые переменные в исходное уравнение, положим

$$v(\xi, \eta) = u(x, y)$$

и найдём u_x , u_y , u_{xx} , u_{xy} , u_{yy} как производные сложной функции $v(\xi(x, y), \eta(x, y))$:

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi - \frac{1}{3}v_\eta, & u_y &= \frac{2}{3}v_\eta; \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi} - \frac{2}{3}v_{\xi\eta} + \frac{1}{9}v_{\eta\eta}, & u_{xy} &= \frac{2}{3}v_{\xi\eta} - \frac{2}{9}v_{\eta\eta}, & u_{yy} &= \frac{4}{9}v_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные производные (а также ξ вместо x) в левую часть исходного уравнения и приводя подобные, получаем:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x &= \\ &= \left(v_{\xi\xi} - \frac{2}{3}v_{\xi\eta} + \frac{1}{9}v_{\eta\eta} \right) - 2 \left(\frac{2}{3}v_{\xi\eta} - \frac{2}{9}v_{\eta\eta} \right) - 2 \left(\frac{4}{9}v_{\eta\eta} \right) - 3 \left(v_\xi - \frac{1}{3}v_\eta \right) - \\ &\quad - 15 \left(\frac{2}{3}v_\eta \right) + 27\xi = v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - 3v_\xi - 5v_\eta + 27\xi. \end{aligned}$$

Ответ: уравнение относится к гиперболическому типу,

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - 3v_\xi - 5v_\eta + 27\xi = 0, \quad \text{где} \quad \xi = x; \quad \eta = \frac{-x+2y}{3}.$$

3.5. Избавление от младших производных

В УЧП 2-го порядка с постоянными коэффициентами всегда можно избавиться от первых производных **при помощи замены**

$$v(\xi_1, \dots, \xi_n) = w(\xi_1, \dots, \xi_n) \cdot e^{a_1\xi_1 + \dots + a_n\xi_n}.$$

Пример. После приведения уравнения из № 77 к каноническому виду

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - 3v_\xi - 5v_\eta + 27\xi = 0$$

сделаем замену:

$$v(\xi, \eta) = w(\xi, \eta) \cdot e^{a\xi + b\eta},$$

откуда

$$v_\xi = (w_\xi + aw) \cdot e^{a\xi + b\eta}, \quad v_\eta = (w_\eta + bw) \cdot e^{a\xi + b\eta},$$

$$v_{\xi\xi} = (w_{\xi\xi} + 2aw_{\xi} + a^2w) \cdot e^{a\xi+b\eta}, \quad v_{\eta\eta} = (w_{\eta\eta} + 2aw_{\eta} + a^2w) \cdot e^{a\xi+b\eta}.$$

Подставим эти выражения в левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - 3v_{\xi} - 5v_{\eta} + 27\xi &= \left[(w_{\xi\xi} + 2aw_{\xi} + a^2w) - (w_{\eta\eta} + 2bw_{\eta} + b^2w) - \right. \\ &\quad \left. - 3(w_{\xi} + aw) - 5(w_{\eta} + bw) \right] \cdot e^{a\xi+b\eta} + 27\xi = \\ &= \left[w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} + (2a - 3)w_{\xi} + (-2b - 5)w_{\eta} + \right. \\ &\quad \left. + (a^2 - b^2 - 3a - 5b)w + 27\xi \cdot e^{-a\xi-b\eta} \right] \cdot e^{a\xi+b\eta}. \end{aligned}$$

Теперь мы можем выбрать a и b так, чтобы скобки, умножаемые на w_{ξ} и w_{η} стали равны нулю:

$$a = \frac{3}{2}, \quad b = -\frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad a^2 - b^2 - 3a - 5b = \frac{9 - 25 - 18 - 50}{4} = -\frac{84}{4} = -21.$$

После подстановки найденных a и b и сокращения на $e^{a\xi+b\eta}$ получим:

$$w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} - 21w + 27\xi \cdot e^{-\frac{3}{2}\xi + \frac{5}{2}\eta} = 0.$$

4. Задача Коши для волнового уравнения. Формула Даламбера

4.1. Общее решение уравнения колебаний

№ 370. Найти общее решение уравнения

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0. \quad (4.1)$$

Шаг 1. Находим замену переменных.

Способ 1 (через уравнения характеристик). Дискриминант характеристической квадратичной формы в данном случае равен a^2 :

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = a^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{гиперболический тип.}$$

Так как $a_{11} = 1 \neq 0$, составим уравнения характеристик $\frac{dx}{dt} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$:

$$\frac{dx}{dt} = \pm a \quad \Rightarrow \quad x = \pm at,$$

и первые интегралы имеют вид:

$$x + at = c, \quad x - at = c.$$

Поэтому заменой, приводящей уравнение (4.1) к каноническому виду, является замена:

$$\begin{cases} \xi = x + at; \\ \eta = x - at. \end{cases} \quad (4.2)$$

Способ 2 (через характеристическую квадратичную форму). В данном случае нам удобнее (и это верно всегда для уравнения гиперболического типа на прямой, если мы хотим явно найти решение) привести квадратичную форму не к обычному её нормальному виду, а к виду $\tilde{Q} = \mu_1\mu_2$. Произведём необходимые преобразования:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 - a^2\lambda_2^2 = \left[\text{как разность квадратов} \right] = (\lambda_1 + a\lambda_2)(\lambda_1 - a\lambda_2) = \mu_1\mu_2,$$

где $\mu_{1,2}$ связаны с $\lambda_{1,2}$ по правилу

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Построим матрицу Γ замены переменных:

$$\Gamma = (A^T)^{-1} = \frac{1}{-2a} \begin{pmatrix} -a & -1 \\ -a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2a} \end{pmatrix}.$$

Откуда, учитывая, что λ_1 у нас соответствует производной по t , а λ_2 — по x , получаем, что замену переменных надо произвести по правилу:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}, \quad \text{то есть} \quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{2a}(x + at); \\ \eta = \frac{1}{2a}(x - at). \end{cases}$$

Итак, оба способа приводят нас к необходимости одной и той же замены (4.2) (с точностью до числового множителя).

Шаг 2. Приведение к каноническому виду.

Пусть $v(\xi, \eta) = u(x, t)$. Замена (4.2) даёт нам следующие соотношения для производных:

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi + v_\eta, & u_t &= a(v_\xi - v_\eta), \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, & u_{tt} &= a^2(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}). \end{aligned}$$

Подставив их в уравнение (4.1), получаем:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = a^2(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) - a^2(v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) = 0,$$

или после сокращения

$$v_{\xi\eta} = 0. \tag{4.3}$$

Шаг 3. Решение уравнения.

Уравнение (4.3) решить легко. В самом деле, раз производная по η от функции двух переменных $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ равна нулю, то $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ не зависит от η , то есть

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = h(\xi).$$

Проинтегрируем последнее равенство по ξ и учтём, что вместо константы интегрирования надо поставить произвольную функцию от η , так как дифференцирование по ξ любую $f_2(\eta)$ обратит в нуль:

$$v(\xi, \eta) = \underbrace{\int h(\xi) d\xi}_{=f_1(\xi)} + f_2(\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Переходя к исходным переменным, получаем

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at), \quad (4.4)$$

где $f_{1,2}$ – произвольные дважды дифференцируемые функции.

Геометрический смысл равенства (4.4).

Пусть $f_2 \equiv 0$. Тогда в момент времени $t = 0$ профиль струны задаётся равенством

$$u(x, 0) = f_1(x),$$

в момент времени $t = 1$ – равенством

$$u(x, 1) = f_1(x + a),$$

то есть график f_1 к моменту $t = 1$ сдвинулся влево² на величину a и так далее. Если же, наоборот, $f_1 \equiv 0$, то в момент времени $t = 0$ профиль струны задаётся равенством

$$u(x, 0) = f_2(x),$$

в момент времени $t = 1$ – равенством

$$u(x, 1) = f_2(x - a),$$

то есть график f_2 к моменту $t = 1$ сдвинулся вправо³ на величину a , и так далее.

Вывод: Решение уравнения колебаний (4.1) представляет собой сумму двух волн, бегущих влево и вправо со скоростью a :

$$u(x, t) = \underbrace{f_1(x + at)}_{\longleftarrow} + \underbrace{f_2(x - at)}_{\longrightarrow}.$$

4.2. Формула Даламбера

Рассмотрим задачу Коши на прямой для простейшего случая волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (0, +\infty); \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in (-\infty, +\infty); \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in (-\infty, +\infty). \end{cases} \quad (4.5)$$

²То есть в отрицательном направлении оси Ox .

³То есть в положительном направлении оси Ox .

Теорема 4.1.

Пусть функции φ , ψ и f лежат в классах: $\varphi(x) \in C^2(-\infty, +\infty)$, $\psi(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$, $f(x, t) \in C((-\infty, +\infty) \times [0, +\infty))$.

Тогда решение задачи Коши (4.5) задаётся **формулой Даламбера**:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau. \quad (4.6)$$

Полное доказательство мы приведём позже, в теме «Применение преобразования Фурье к решению уравнений математической физики», № 815, 816. Кроме того, его можно получить элементарной подстановкой формулы Даламбера в равенства (4.5)⁴.

Докажем эту теорему для случая

$$f(x, t) \equiv 0.$$

Итак, мы убедились, что всякое решение уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ представляется в виде

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at). \quad (4.4)$$

Подставим в это равенство начальное условие:

$$\begin{aligned} \begin{cases} u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x); \\ u_t(x, 0) = a(f_1'(x) - f_2'(x)) = \psi(x). \end{cases} & \implies \\ & \implies \begin{cases} f_1(y) + f_2(y) = \varphi(y); \\ f_1(y) - f_2(y) = \frac{1}{a} \int_0^y \psi(s) ds + 2c. \end{cases} \end{aligned}$$

Найдя полусумму и полуразность этих равенств, получим:

$$\begin{cases} f_1(y) = \frac{\varphi(y)}{2} + \frac{1}{a} \int_0^y \psi(s) ds + c; \\ f_2(y) = \frac{\varphi(y)}{2} - \frac{1}{a} \int_0^y \psi(s) ds - c, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} f_1(x + at) = \frac{\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(s) ds + c; \\ f_2(x - at) = \frac{\varphi(x-at)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} \psi(s) ds - c. \end{cases}$$

⁴Заметим, что такой способ позволит убедиться лишь в том, что существует решение (4.5), задаваемое формулой (4.6). Но он не гарантирует, что нет других решений, задаваемых какими-то другими формулами.

Наконец, подставим $f_{1,2}$ в формулу (4.4):

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= f_1(x + at) + f_2(x - at) = \frac{\varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(s) ds + c + \\
 &\quad + \frac{\varphi(x - at)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} \psi(s) ds - c = \\
 &= \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \underbrace{\left(\int_0^{x+at} \psi(s) ds - \int_0^{x-at} \psi(s) ds \right)}_{\int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds} + c - c = \\
 &= \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds.
 \end{aligned}$$

4.3. Примеры решения задач

№ 438^M Найти решение задачи Коши⁵

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \beta x^2, & x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (0, +\infty); \\ u(x, 0) = e^{-x}, & x \in (-\infty, +\infty); \\ u_t(x, 0) = \gamma, & x \in (-\infty, +\infty). \end{cases} \quad (4.7)$$

Чтобы найти решение, нам достаточно применить формулу Даламбера. Вычислим сначала самый сложный входящий в неё интеграл:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau &= \frac{\beta}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} s^2 ds d\tau = \\
 &= \frac{\beta}{2a} \int_0^t \left. \frac{s^3}{3} \right|_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\tau = \frac{\beta}{6a} \int_0^t ((x + a(t - \tau))^3 - (x - a(t - \tau))^3) d\tau = \\
 &= \frac{\beta}{6a} \int_0^t \left(\left(\textcolor{red}{x}^3 + 3x^2(t - \tau) + \textcolor{blue}{3x}(t - \tau)^2 + (t - \tau)^3 \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\textcolor{red}{x}^3 - 3x^2(t - \tau) + \textcolor{blue}{3x}(t - \tau)^2 - (t - \tau)^3 \right) \right) d\tau =
 \end{aligned}$$

⁵Здесь и далее знак «^M» после номера задачи означает, что её условие модифицировано по сравнению с условием задачи с тем же номером в задачнике [1].

$$\begin{aligned}
&= \frac{\beta}{6a} \int_0^t (6x^2(t-\tau) + 2(t-\tau)^3) d\tau = \left[\tau - t = p, \quad d\tau = dp \right] = \\
&= \frac{\beta}{6a} \int_{-t}^0 (6x^2(-p) + 2p^3) dp = \frac{\beta}{6a} \left(-6x^2 \frac{p^2}{2} \Big|_{p=-t}^{p=0} + 2 \frac{p^4}{4} \Big|_{p=-t}^{p=0} \right) = \frac{\beta}{12a} (6x^2t^2 + t^4).
\end{aligned}$$

Тогда из формулы Даламбера получаем:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau = \\
&= \frac{e^{-x-at} + e^{-x+at}}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \gamma ds + \frac{\beta}{12a} (6x^2t^2 + t^4) = \\
&= e^{-x} \cdot \frac{e^{-at} + e^{+at}}{2} + \frac{\gamma}{2a} ((x+at) - (x-at)) + \frac{\beta}{12a} (6x^2t^2 + t^4) = \\
&= e^{-x} \operatorname{ch} at + \gamma t + \frac{\beta}{12a} (6x^2t^2 + t^4).
\end{aligned}$$

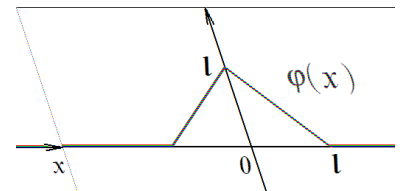
Профиль бесконечной струны I. Нарисовать профиль бесконечной струны в моменты времени $t = \frac{l}{4a}, \frac{l}{2a}, \frac{3l}{4a}, \frac{l}{a}$ и $\frac{2l}{a}$, если её колебания описываются задачей Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (0, +\infty); \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in (-\infty, +\infty); \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in (-\infty, +\infty), \end{cases} \quad (4.8)$$

где функция

$$\psi(x) \equiv 0,$$

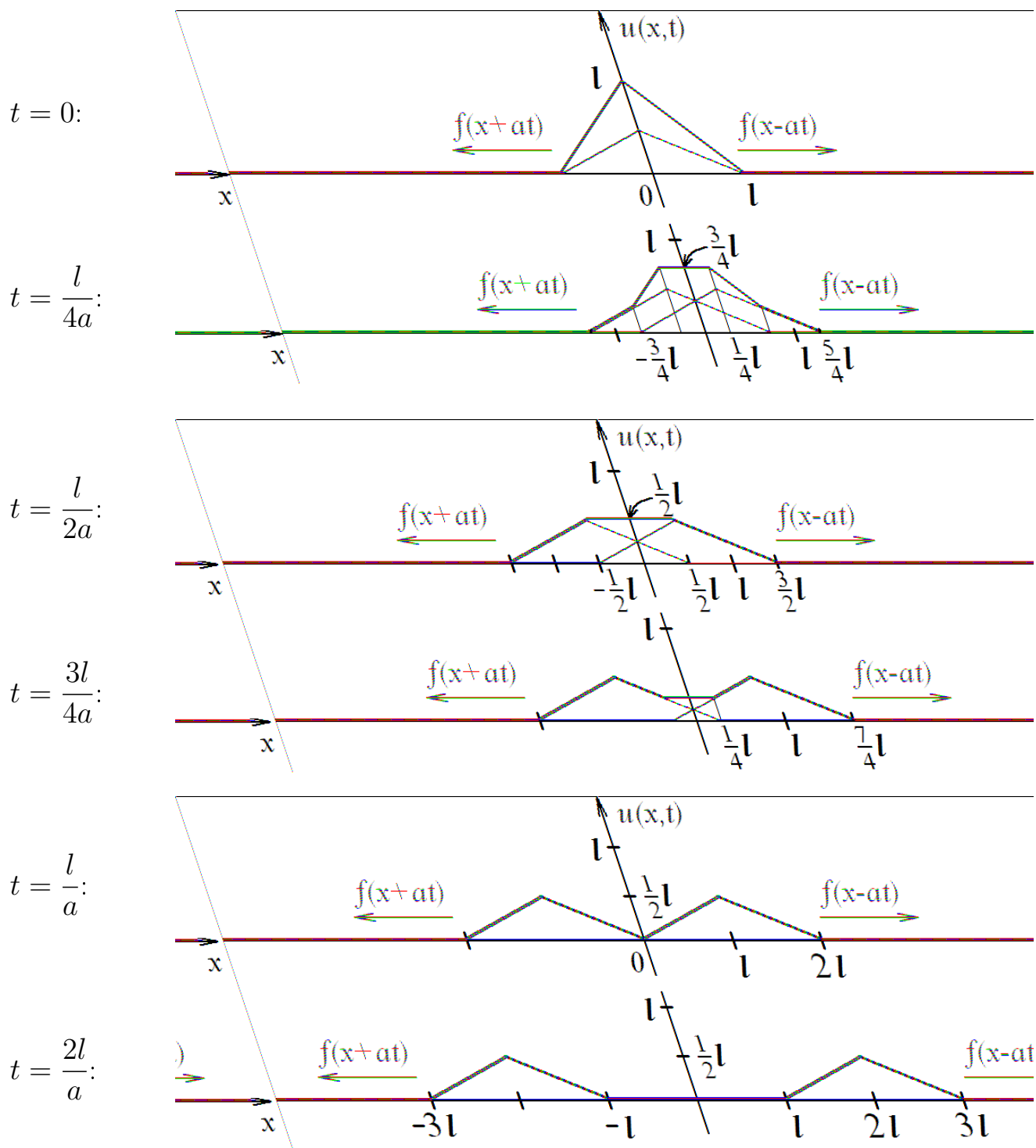
а функция $\varphi(x)$ имеет вид, приведённый на рисунке.



Решение. По формуле Даламбера (4.6) при $f \equiv 0$ и $\psi(x) \equiv 0$ получаем:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что функция $u(x, t)$ есть сумма двух волн одинакового профиля $f = \frac{\varphi}{2}$, одна из которых бежит влево, а другая вправо. Тогда



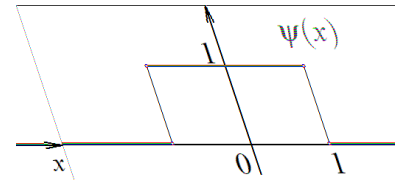
Профиль бесконечной струны II. Нарисовать профиль бесконечной струны в моменты времени $t = \frac{l}{4a}, \frac{l}{2a}, \frac{l}{a}, \frac{2l}{a}$ и $\frac{3l}{a}$, если её колебания описываются задачей Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (0, +\infty); \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in (-\infty, +\infty); \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in (-\infty, +\infty), \end{cases} \quad (4.9)$$

где функция

$$\varphi(x) \equiv 0,$$

а функция $\psi(x)$ имеет вид, приведённый на рисунке.



Решение. По формуле Даламбера (4.6) при $f \equiv 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$ получаем:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds = \Psi(x+at) - \Psi(x-at),$$

где $\Psi(y)$ – некоторая первообразная функции $\frac{\psi(x)}{2a}$, например, функция

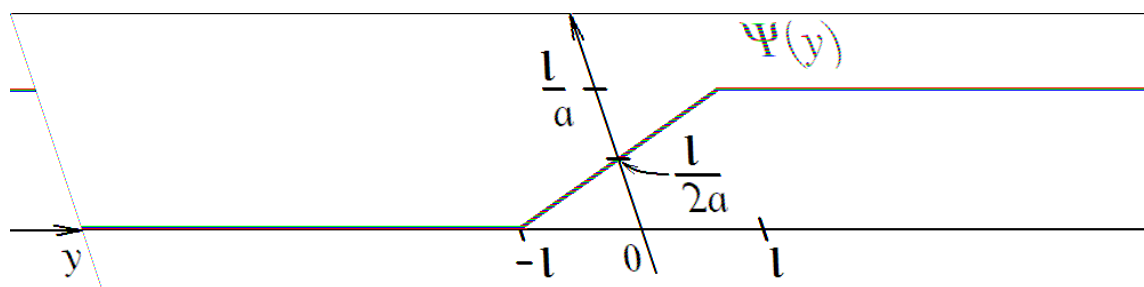
$$\Psi(y) = \frac{1}{2a} \int_{-l}^y \psi(s) ds.$$

(В качестве нижнего предела мы взяли $(-l)$, поскольку все изменения с функцией $\psi(x)$ происходят только справа от этого числа.)

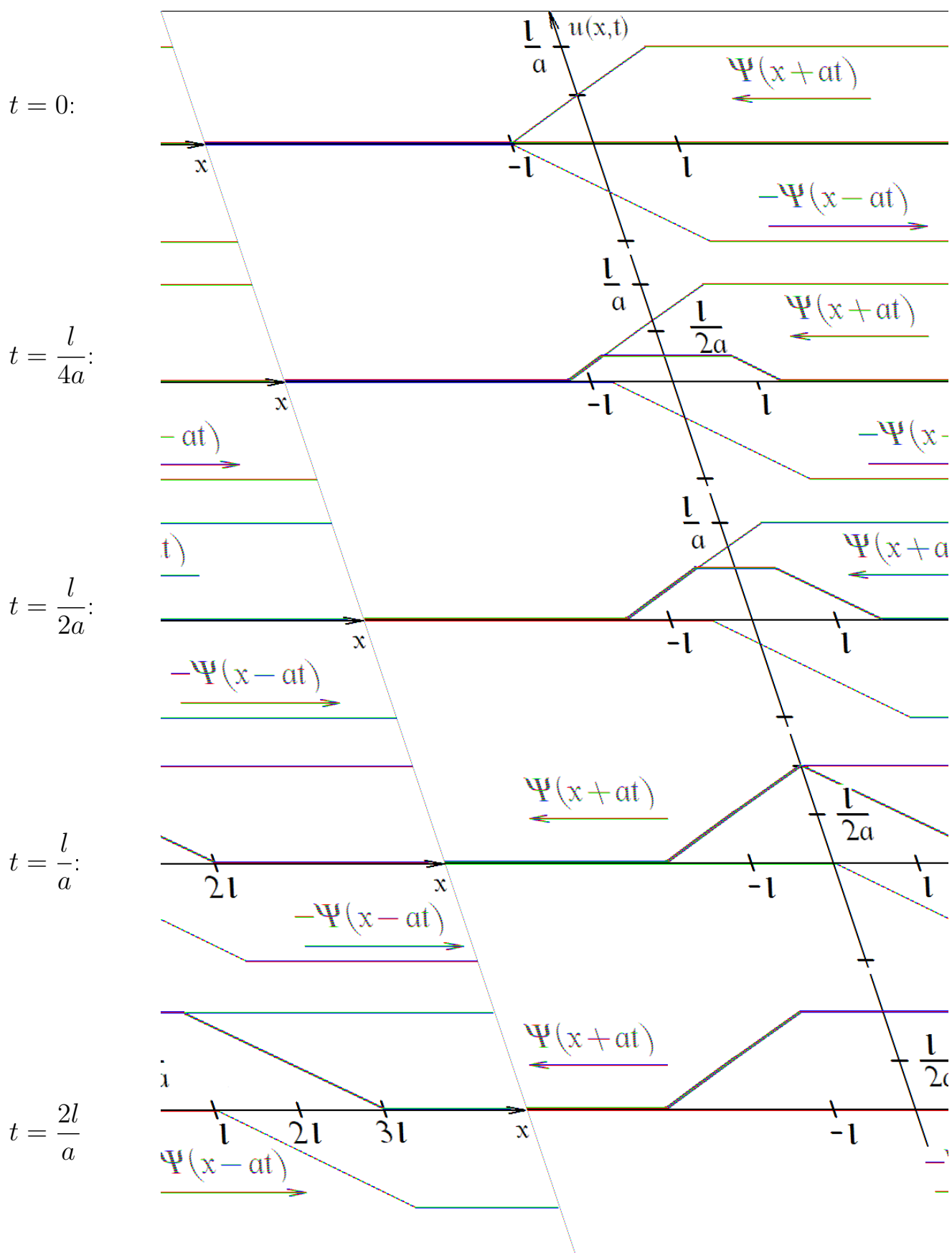
Отсюда можно сделать вывод, что функция $u(x, t)$ есть разность двух волн одинакового профиля Ψ , одна из которых бежит влево, а другая – вправо. Причём из волны, бегущей влево, вычитается волна, бегущая вправо. Найдём $\Psi(y)$ для нашего случая:

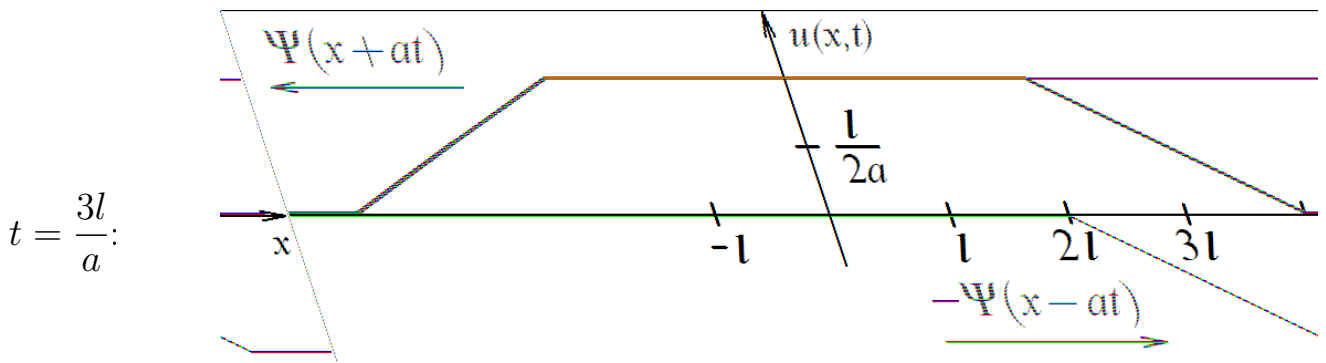
$$\Psi(y) = \frac{1}{2a} \int_{-l}^y \psi(s) ds = \begin{cases} 0, & \text{когда } y \in (-\infty, -l]; \\ \frac{y+l}{2a}, & \text{когда } y \in [-l, l]; \\ \frac{l}{a}, & \text{когда } y \in [l, +\infty). \end{cases}$$

График этой функции выглядит так:



Поэтому профиль струны будет принимать в различные моменты времени форму:





№ 385. Найти решение задачи:

$$\begin{cases} u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0, & x \in (0, +\infty), \quad y \in (-\infty, +\infty); \\ u(0, y) = \varphi(y), & y \in (-\infty, +\infty); \\ u_x(0, y) = \psi(y), & y \in (-\infty, +\infty). \end{cases} \quad (4.10)$$

Прежде чем решать эту задачу, заметим, что если переименовать переменную x в t , а y – в x , то получится обычная задача Коши для УЧП 2-го порядка.

Шаг 1. Находим замену переменных.

Способ 1 (через уравнения характеристик). Дискриминант характеристической квадратичной формы в данном случае равен a^2 :

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = (-1)^2 - 1 \cdot 0 = 1 > 0, \quad \Rightarrow \quad \text{гиперболический тип.}$$

Так как $a_{11} = 1 \neq 0$, составим уравнения характеристик $\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$:

$$\frac{dy}{dx} = -1 \pm 1 = \begin{cases} 0, \\ -2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = c, \\ y = -2x + c, \end{cases}$$

и первые интегралы имеют вид:

$$y = c, \quad y + 2x = c.$$

Поэтому заменой, приводящей уравнение (4.10) к каноническому виду, является замена:

$$\begin{cases} \xi = y; \\ \eta = y + 2x. \end{cases} \quad (4.11)$$

Способ 2 (через характеристическую квадратичную форму). В данном случае нам удобнее (как всегда для уравнения гиперболического типа на прямой) привести квадратичную форму не к обычному её нормальному виду, а к виду $\tilde{Q} = \mu_1\mu_2$. Произведём необходимые преобразования:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 = (\lambda_1 - 2\lambda_2)\lambda_1 = \mu_1\mu_2,$$

где $\mu_{1,2}$ связаны с $\lambda_{1,2}$ по правилу

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Построим матрицу Γ замены переменных:

$$\Gamma = (A^T)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Откуда, учитывая, что λ_1 у нас соответствует производной по x , а λ_2 – по y , получаем, что замену переменных надо произвести по правилу:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{то есть} \quad \begin{cases} \xi = -\frac{1}{2} \cdot y; \\ \eta = \frac{1}{2}(2x + y). \end{cases}$$

Итак, оба способа приводят нас к необходимости одной и той же замены (4.11) (с точностью до числового множителя).

Шаг 2. Приведение к каноническому виду.

Пусть $v(\xi, \eta) = u(x, t)$. Замена (4.11) даёт нам следующие соотношения для производных:

$$\begin{aligned} u_x &= 2v_\eta, & u_y &= v_\xi + v_\eta, \\ u_{xx} &= 4v_{\eta\eta}, & u_{xy} &= 2(v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}). \end{aligned}$$

Подставив их в уравнение (4.10), получаем:

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 4v_{\eta\eta} - 2 \cdot 2(v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) + 4e^\xi = 0,$$

или, после сокращения,

$$v_{\xi\eta} = e^\xi. \quad (4.12)$$

Шаг 3. Решение уравнения.

Уравнение (4.12) решить легко – достаточно проинтегрировать его по ξ и η . Сначала интегрируем по η :

$$v_\xi = \eta \cdot e^\xi + h(\xi).$$

(Напомним, что функция $h(\xi)$ появилась вместо и в качестве константы интегрирования.)

Теперь проинтегрируем последнее равенство по ξ и учтём, что вместо константы интегрирования надо поставить произвольную функцию от η :

$$v(\xi, \eta) = \eta \cdot e^\xi + \underbrace{\int h(\xi) d\xi}_{=f_1(\xi)} + f_2(\eta) = \eta \cdot e^\xi + f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Переходя к исходным переменным, получаем:

$$u(x, t) = (y + 2x) \cdot e^y + f_1(y) + f_2(y + 2x), \quad (4.13)$$

где $f_{1,2}$ – произвольные дважды дифференцируемые функции.

Шаг 4. Использование начальных условий.

Подставляя общее решение (4.13) уравнения в начальные условия, получаем:

$$\begin{cases} u(0, y) = \varphi(y), \\ u_x(0, y) = \psi(y), \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ye^y + f_1(y) + f_2(y) = \varphi(y), \\ 2e^y + 2f_2'(y) = \psi(y). \end{cases}$$

Из последнего уравнения сразу находится $f_2(s)$:

$$\begin{aligned} f_2(s) &= \int_0^s \left(\frac{1}{2} \psi(y) - e^y \right) dy + c = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^s \psi(y) dy}_{\Psi(s)} - e^y \Big|_0^s + c_1 = \frac{1}{2} \Psi(s) - e^s + 1 + c_1 = \\ &= [c = c_1 + 1] = \frac{1}{2} \Psi(s) - e^s + c. \end{aligned}$$

Подставляя найденную функцию $f_2(s) = \frac{1}{2} \Psi(s) - e^s + c$, в первое начальное условие, найдём $f_1(s)$:

$$f_1(s) = \varphi(s) - \frac{1}{2} \Psi(s) + e^s - c - se^s = \varphi(s) - \frac{1}{2} \Psi(s) + (1-s)e^s - c.$$

Осталось подставить

$$f_1(s) = \varphi(s) - \frac{1}{2} \Psi(s) + (1-s)e^s - c \quad \text{и} \quad f_2(s) = \frac{1}{2} \Psi(s) - e^s + c$$

в формулу общего решения (4.13).

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (y + 2x) \cdot e^y + f_1(y) + f_2(y + 2x) = \\ &= (y + 2x) \cdot e^y + \varphi(y) - \frac{1}{2} \Psi(y) + (1-y)e^y - c + \frac{1}{2} \Psi(y + 2x) - e^{y+2x} + c = \\ &= (2x + 1) \cdot e^y - e^{y+2x} + \varphi(y) + \frac{1}{2} \left(\int_0^{y+2x} \psi(y) dy - \int_0^y \psi(y) dy \right) = \\ &= (2x + 1) \cdot e^y - e^{y+2x} + \varphi(y) + \frac{1}{2} \int_y^{y+2x} \psi(y) dy. \end{aligned}$$

Ответ:

$$u(x, t) = (2x + 1) \cdot e^y - e^{y+2x} + \varphi(y) + \frac{1}{2} \int_y^{y+2x} \psi(y) dy.$$

5. Волновое уравнение на полупрямой

5.1. Метод продолжения

Рассмотрим задачу Коши на прямой для простейшего случая волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (0, +\infty); \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in (-\infty, +\infty); \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in (-\infty, +\infty). \end{cases} \quad (5.1)$$

Вспомним утверждения, доказанные в номерах 445 и 446:

№ 445. Пусть $f(x, t) \equiv 0$.
Тогда

а) из нечётности $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ и $\psi(-x) = -\psi(x)$ функций φ и ψ следует, что

$$u(0, t) = 0;$$

б) из чётности $\varphi(-x) = \varphi(x)$ и $\psi(-x) = \psi(x)$ функций φ и ψ следует, что

$$u_x(0, t) = 0.$$

№ 446. Пусть $\varphi(x), \psi(x) \equiv 0$.
Тогда

а) из нечётности $f(-x, t) = -f(x, t)$ по переменной x функции f следует, что

$$u(0, t) = 0;$$

б) из чётности $f(-x, t) = f(x, t)$ по переменной x функции f следует, что

$$u_x(0, t) = 0.$$

Это наблюдение и легло в основу метода продолжения. Продемонстрируем его на примерах, а затем сформулируем в виде теоремы.

5.2. Примеры решения задач

№ 447. Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае однородного краевого условия первого рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0; \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0; \\ u(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Пока мы ещё не умеем решать задачи на полупрямой, зато всё знаем о решении задачи Коши на прямой. Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & x \in (-\infty, +\infty), t > 0; \\ v(x, 0) = \varphi_1(x), & x \in (-\infty, +\infty); \\ v_t(x, 0) = \psi_1(x), & x \in (-\infty, +\infty), \end{cases} \quad (5.3)$$

где функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ построены по функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ их **нечётным продолжением** на всю числовую ось:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при } x > 0; \\ 0, & \text{при } x = 0; \\ -\varphi(-x), & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad \psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{при } x > 0; \\ 0, & \text{при } x = 0; \\ -\psi(-x), & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x, t)$ на промежутке $x \in (0, +\infty)$. Так как v – решение (5.3), то:

1) из первого равенства (5.3) следует, что

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \quad x \in (0, +\infty), \quad t > 0;$$

2) из второго равенства (5.3) следует, что

$$v(x, 0) = \varphi_1(x) \equiv \varphi(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad t > 0;$$

3) из третьего равенства (5.3) следует, что

$$v_t(x, 0) = \psi_1(x) \equiv \psi(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad t > 0.$$

Наконец, в силу утверждения из № 445 для решения $v(x, t)$ вспомогательной задачи (5.3) справедливо соотношение

$$v(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение $v(x, t)$ вспомогательной задачи (5.3) является также решением задачи (5.2) на полупрямой⁶:**

$$u(x, t) \equiv v(x, t), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0.$$

А для решения задачи (5.3) на всей прямой у нас есть формула Даламбера, по которой в случае $f(x, t) \equiv 0$ получаем:

$$v(x, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds.$$

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds,$$

где функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ определены равенствами (5.4).

№ 449. *Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае однородного краевого условия первого рода:*

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ u_t(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ u(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Пока мы ещё не умеем решать задачи на полупрямой, зато всё знаем о решении задачи Коши на прямой. Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f_1(x, t), & x \in (-\infty, +\infty), \quad t > 0; \\ v(x, 0) = 0, & x \in (-\infty, +\infty); \\ v_t(x, 0) = 0, & x \in (-\infty, +\infty), \end{cases} \quad (5.6)$$

⁶То, что другого решения у задачи (5.2) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

где функции $f_1(x, t)$ построена по функции $f(x, t)$ её **нечётным продолжением** по переменной x на всю числовую ось:

$$f_1(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & \text{при } x > 0; \\ 0, & \text{при } x = 0; \\ -f(-x, t), & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x, t)$ на промежутке $x \in (0, +\infty)$. Так как v – решение (5.6), то:

1) из первого равенства (5.6) следует, что

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x, t), \quad x \in (0, +\infty), \quad t > 0;$$

2) из второго равенства (5.6) следует, что

$$v(x, 0) = 0 \equiv \varphi(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad t > 0;$$

3) из третьего равенства (5.6) следует, что

$$v_t(x, 0) = 0 \equiv \psi(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad t > 0.$$

Наконец, в силу утверждения из № 446 для решения $v(x, t)$ вспомогательной задачи (5.6) справедливо соотношение

$$v(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение $v(x, t)$ вспомогательной задачи (5.6) является также решением задачи (5.5) на полупрямой⁷:**

$$u(x, t) \equiv v(x, t), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0.$$

А для решения задачи (5.6) на всей прямой у нас есть формула Даламбера, по которой в случае $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ получаем:

$$v(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s, \tau) ds d\tau.$$

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s, \tau) ds d\tau,$$

где функция $f_1(x, t)$ определена равенством (5.7).

⁷То, что другого решения у задачи (5.5) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

№ 451. Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае однородного краевого условия первого рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0; \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0; \\ u(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Рассмотрим две вспомогательные задачи на полупрямой:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & x, t > 0; \\ v(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0; \\ v_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0; \\ v(0, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = f(x, t), & x, t > 0; \\ w(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ w_t(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ w(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

Как легко заметить, функция

$$u(x, t) \equiv v(x, t) + w(x, t)$$

является решением исходной задачи (5.8).

С другой стороны, задачи (5.9) мы уже решили, соответственно, в номерах 447 и 449. Воспользуемся их результатами:

$$v(x, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds,$$

$$w(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s, \tau) ds d\tau,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x, t)$ определены равенствами

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при } x > 0; \\ 0, & \text{при } x = 0; \\ -\varphi(-x), & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad \psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{при } x > 0; \\ 0, & \text{при } x = 0; \\ -\psi(-x), & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (5.10)$$

$$f_1(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & \text{при } x > 0; \\ 0, & \text{при } x = 0; \\ -f(-x, t), & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Поэтому для решения $u(x, t) \equiv v(x, t) + w(x, t)$ задачи (5.8) получаем:

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s, \tau) ds d\tau,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x, t)$ определены равенствами (5.10) и (5.11), соответственно.

№ 448. Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае однородного краевого условия второго рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, \ t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0; \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0; \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (5.12)$$

Пока мы ещё не умеем решать задачи на полупрямой, зато всё знаем о решении задачи Коши на прямой. Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & x \in (-\infty, +\infty), \ t > 0; \\ v(x, 0) = \varphi_1(x), & x \in (-\infty, +\infty); \\ v_t(x, 0) = \psi_1(x), & x \in (-\infty, +\infty), \end{cases} \quad (5.13)$$

где функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ построены по функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ их **чётным продолжением** на всю числовую ось:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при } x \geq 0; \\ \varphi(-x), & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad \psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{при } x \geq 0; \\ \psi(-x), & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x, t)$ на промежутке $x \in (0, +\infty)$. Так как v – решение (5.13), то:

1) из первого равенства (5.13) следует, что

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \quad x \in (0, +\infty), \ t > 0;$$

2) из второго равенства (5.13) следует, что

$$v(x, 0) = \varphi_1(x) \equiv \varphi(x), \quad x \in (0, +\infty), \ t > 0;$$

3) из третьего равенства (5.13) следует, что

$$v_t(x, 0) = \psi_1(x) \equiv \psi(x), \quad x \in (0, +\infty), \ t > 0.$$

Наконец, в силу утверждения из № 446 для решения $v(x, t)$ вспомогательной задачи (5.13) справедливо соотношение

$$v_x(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение $v(x, t)$ вспомогательной задачи (5.13) является также решением задачи (5.12) на полупрямой**⁸:

$$u(x, t) \equiv v(x, t), \quad x \geq 0, \ t \geq 0.$$

А для решения задачи (5.13) на всей прямой у нас есть формула Даламбера, по которой в случае $f(x, t) \equiv 0$ получаем:

$$v(x, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds.$$

⁸То, что другого решения у задачи (5.12) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds,$$

где функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ определены равенствами (5.14).

№ 450. Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае однородного краевого условия второго рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ u_t(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

Пока мы ещё не умеем решать задачи на полупрямой, зато всё знаем о решении задачи Коши на прямой. Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f_1(x, t), & x \in (-\infty, +\infty), t > 0; \\ v(x, 0) = 0, & x \in (-\infty, +\infty); \\ v_t(x, 0) = 0, & x \in (-\infty, +\infty), \end{cases} \quad (5.16)$$

где функции $f_1(x, t)$ построена по функции $f(x, t)$ её **чётным продолжением** по переменной x на всю числовую ось:

$$f_1(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & \text{при } x \geq 0; \\ f(-x, t), & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x, t)$ на промежутке $x \in (0, +\infty)$. Так как v – решение (5.16), то:

1) из первого равенства (5.16) следует, что

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x, t), \quad x \in (0, +\infty), t > 0;$$

2) из второго равенства (5.16) следует, что

$$v(x, 0) = 0 \equiv \varphi(x), \quad x \in (0, +\infty), t > 0;$$

3) из третьего равенства (5.16) следует, что

$$v_t(x, 0) = 0 \equiv \psi(x), \quad x \in (0, +\infty), t > 0.$$

Наконец, в силу утверждения из № 446, для решения $v(x, t)$ вспомогательной задачи (5.16) справедливо соотношение

$$v_x(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение $v(x, t)$ вспомогательной задачи (5.16) является также решением задачи (5.15) на полупрямой**⁹:

$$u(x, t) \equiv v(x, t), \quad x \geq 0, t \geq 0.$$

⁹То, что другого решения у задачи (5.15) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

А для решения задачи (5.16) на всей прямой у нас есть формула Даламбера, по которой в случае $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ получаем:

$$v(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s, \tau) ds d\tau.$$

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s, \tau) ds d\tau,$$

где функция $f_1(x, t)$ определена равенством (5.17).

№ 452. Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае однородного краевого условия второго рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0; \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0; \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

Рассмотрим две вспомогательные задачи на полупрямой:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & x, t > 0; \\ v(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0; \\ v_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0; \\ v_x(0, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = f(x, t), & x, t > 0; \\ w(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ w_t(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ w_x(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (5.19)$$

Как легко заметить, функция

$$u(x, t) \equiv v(x, t) + w(x, t)$$

является решением исходной задачи (5.18).

С другой стороны, задачи (5.19) мы уже решили, соответственно, в номерах 448 и 450. Воспользуемся их результатами:

$$v(x, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds,$$

$$w(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s, \tau) ds d\tau,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x, t)$ определены равенствами

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при } x \geq 0; \\ \varphi(-x), & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad \psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{при } x \geq 0; \\ \psi(-x), & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (5.20)$$

$$f_1(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & \text{при } x \geq 0; \\ f(-x, t), & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (5.21)$$

Поэтому для решения $u(x, t) \equiv v(x, t) + w(x, t)$ задачи (5.18) получаем:

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s, \tau) ds d\tau,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x, t)$ определены равенствами (5.20) и (5.21), соответственно.

Результаты №№ 447 – 452 сформулируем в виде теоремы.

Теорема 5.1 (Метод продолжения).

1. Решение задачи

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0; \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0; \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

задаётся формулой Даламбера

$$u(x, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s, \tau) ds d\tau,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x, t)$ есть **нечётные** по x продолжения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x, t)$ на всю числовую прямую.

2. Решение задачи

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0; \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0; \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

задаётся формулой Даламбера

$$u(x, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s, \tau) ds d\tau,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x, t)$ есть **чётные** по x продолжения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x, t)$ на всю числовую прямую.

Замечание 5.1. Метод продолжения в приведённом виде не распространяется на:

- краевое условие 3-го рода;
- на неоднородные краевые условия.

При этом случай неоднородных краевых условий (при $\varphi, \psi, f \equiv 0$) мы научимся решать методом характеристик.

5.3. Метод характеристик

Будем рассматривать задачу нахождения функции $u(x, t)$ на полупрямой $x > 0$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ u_t(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ \text{(КУ)} \end{cases} \quad (5.22)$$

где краевое условие (КУ) имеет один из видов:

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu(t), & t > 0 - \text{краевое условие I-го рода;} \\ u_x(0, t) = \nu(t), & t > 0 - \text{краевое условие II-го рода;} \\ u_x(0, t) - hu(0, t) = \varkappa(t), & t > 0 - \text{краевое условие III-го рода.} \end{cases} \quad \text{(КУ)}$$

Поскольку решение уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ имеет вид

$$u(x, t) = \underbrace{f_1(x + at)}_{\longleftarrow} + \underbrace{f_2(x - at)}_{\longrightarrow}$$

суммы двух волн, одна из которых бежит влево, а другая вправо, внешней силы f нет, в начальный момент струна справа от $x = 0$ имеет нулевое отклонение от положения равновесия и нулевую скорость, то обе волны $f_1(x + at)$ и $f_2(x - at)$ имеют в начальный момент $t = 0$ носитель (то есть множество точек, где они отличны от нуля) слева от $x = 0$. При этом волна $f_1(x + at)$ при $t > 0$ побежит влево, и поэтому никак не повлияет на решение справа от нуля. Поэтому мы смело можем считать, что $f_1(s) \equiv 0, \quad s \in \mathbb{R}$.

Вывод: Решение задачи (5.22) для уравнения колебаний на полупрямой представляет собой одну волну, бегущую вправо со скоростью a , вызванную движением края $x = 0$:

$$u(x, t) = \underbrace{f_2(x - at)}_{\longrightarrow}, \quad x, t \geq 0.$$

5.4. Примеры решения задач

№ 454. Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае неоднородного краевого условия второго рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ u_t(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ u_x(0, t) = \nu(t), & t > 0. \end{cases} \quad (5.23)$$

Так как решение задачи (5.23) представляет собой одну волну, бегущую вправо со скоростью a , вызванную движением края $x = 0$:

$$u(x, t) = \underbrace{f_2(x - at)}_{\rightarrow}, \quad x, t \geq 0, \quad (5.24)$$

то нам осталось только найти функцию $f_2(s)$. Выясним, какие требования накладывают на $f_2(s)$ условия задачи (5.23):

- 1) уравнение $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ выполняется автоматически для любой функции $f_2(s) \in C^2(\mathbb{R})$;
- 2) начальное условие $u(x, 0) = 0, x \geq 0$ требует, чтобы $f_2(s) = 0$ при $s > 0$;
- 3) начальное условие $u_t(x, 0) = 0, x \geq 0$ требует, чтобы $f_2'(s) = 0$ при $s > 0$;
- 4) краевое условие $u_x(0, t) = \nu(t), t \geq 0$ требует, чтобы $f_2'(-at) = \nu(t), t > 0$ или, после замены переменной $s = -at$,

$$f_2'(s) = \nu\left(-\frac{s}{a}\right) \quad \text{при } s < 0.$$

Заметим, что условие 3) следует из условия 2). Таким образом, поведение функции задаётся условием 2) при $s > 0$ и условием 4) при $s < 0$.

Из условия 4) найдём $f_2(s)$ при $s < 0$:

$$f_2(s) = \int_0^s \nu\left(-\frac{p}{a}\right) dp + \underbrace{f_2(0)}_{=0} = \left[r = -\frac{p}{a}\right] = -a \int_0^{-\frac{s}{a}} \nu(r) dr, \quad s < 0.$$

Подставляя вместо s выражение $(x - at)$ и вспоминая условие 2), получаем:

Ответ:

$$u(x, t) = f_2(x - at) = \begin{cases} 0, & x \geq at > 0; \\ -a \int_0^{-\frac{x-at}{a}} \nu(r) dr, & x < at. \end{cases}$$

№ 453. Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае неоднородного краевого условия первого рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ u_t(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ u(0, t) = \mu(t), & t > 0. \end{cases} \quad (5.25)$$

Так как решение задачи (5.25) представляет собой одну волну, бегущую вправо со скоростью a , вызванную движением края $x = 0$:

$$u(x, t) = \underbrace{f_2(x - at)}_{\longrightarrow}, \quad x, t \geq 0, \quad (5.26)$$

то нам осталось только найти функцию $f_2(s)$. Выясним, какие требования накладывают на $f_2(s)$ условия задачи (5.25):

- 1) уравнение $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ выполняется автоматически для любой функции $f_2(s) \in C^2(\mathbb{R})$;
- 2) начальное условие $u(x, 0) = 0, \quad x \geq 0$ требует, чтобы $f_2(s) = 0$ при $s > 0$;
- 3) начальное условие $u_t(x, 0) = 0, \quad x \geq 0$ требует, чтобы $f_2'(s) = 0$ при $s > 0$;
- 4) краевое условие $u(0, t) = \mu(t), \quad t \geq 0$ требует, чтобы $f_2(-at) = \mu(t), \quad t > 0$ или, после замены переменной $s = -at$,

$$f_2(s) = \mu\left(-\frac{s}{a}\right) \quad \text{при } s < 0.$$

Заметим, что условие 3) следует из условия 2). Таким образом, поведение функции задаётся условием 2) при $s > 0$ и условием 4) при $s < 0$.

Подставляя вместо s выражение $(x - at)$, из условий 2) и 4) получаем:

Ответ:

$$u(x, t) = f_2(x - at) = \begin{cases} 0, & x \geq at > 0; \\ \mu\left(-\frac{x-at}{a}\right), & x < at. \end{cases}$$

№ 455. Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае неоднородного краевого условия второго рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ u_t(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ u_x(0, t) - hu(0, t) = \varkappa(t), & t > 0. \end{cases} \quad (5.27)$$

Так как решение задачи (5.27) представляет собой одну волну, бегущую вправо со скоростью a , вызванную движением края $x = 0$:

$$u(x, t) = \underbrace{f_2(x - at)}_{\longrightarrow}, \quad x, t \geq 0, \quad (5.28)$$

то нам осталось только найти функцию $f_2(s)$. Выясним, какие требования накладывают на $f_2(s)$ условия задачи (5.27):

- 1) уравнение $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ выполняется автоматически для любой функции $f_2(s) \in C^2(\mathbb{R})$;
- 2) начальное условие $u(x, 0) = 0, \quad x \geq 0$ требует, чтобы $f_2(s) = 0$ при $s > 0$;
- 3) начальное условие $u_t(x, 0) = 0, \quad x \geq 0$ требует, чтобы $f_2'(s) = 0$ при $s > 0$;

4) краевое условие $u_x(0, t) - hu(0, t) = \varkappa(t)$, $t \geq 0$ требует, чтобы $f_2'(-at) - hf_2(-at) = \varkappa(t)$, $t > 0$ или, после замены переменной $s = -at$,

$$f_2'(s) - hf_2(s) = \varkappa\left(-\frac{s}{a}\right) \quad \text{при } s < 0.$$

Заметим, что условие 3) следует из условия 2). Таким образом, поведение функции задаётся условием 2) при $s > 0$ и условием 4) при $s < 0$.

Из условия 4), которое есть линейное ОДУ, найдём $f_2(s)$ при $s < 0$.

Обозначим $\varkappa\left(-\frac{s}{a}\right) = \gamma(s)$. Тогда уравнение для $f_2(s)$ примет вид:

$$f_2'(s) - hf_2(s) = \gamma(s). \quad (5.29)$$

Сначала найдём решение соответствующего однородного уравнения:

$$f_{2o}'(s) - hf_{2o}(s) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{df_{2o}}{f_{2o}} = hds \quad \Longrightarrow \quad f_{2o}(s) = ce^{hs}.$$

Далее, в соответствии с методом вариации постоянной, будем искать решение $f_2(s)$ неоднородного уравнения (5.29) в виде

$$f_2(s) = c(s)e^{hs}. \quad (5.30)$$

Подставляем искомый вид решения в (5.29):

$$\underbrace{c'(s)e^{hs} + hc(s)e^{hs}}_{f_2'(s)} - \underbrace{hc(s)e^{hs}}_{hf_2(s)} = \gamma(s) \quad \Longrightarrow \quad c'(s) = \gamma(s)e^{-hs} \quad \Longrightarrow$$

$$c(s) = \int_0^s \gamma(p)e^{-hp}dp + c_1.$$

Подставим найденную функцию $c(s)$ в (5.30):

$$f_2(s) = e^{hs} \cdot \int_0^s \gamma(p)e^{-hp}dp + c_1e^{hs}.$$

Учитывая, что в силу условия 2) функция $f_2(s)$ должна в точке $s = 0$ обратиться в ноль, найдём c_1 :

$$f_2(0) = e^0 \cdot \int_0^0 \gamma(p)e^{-hp}dp + c_1e^0 = c_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 0.$$

Поэтому, окончательно,

$$f_2(s) = e^{hs} \cdot \int_0^s \gamma(p)e^{-hp}dp, \quad s < 0. \quad (5.31)$$

Вспомним, что $\gamma(p) = \kappa\left(-\frac{p}{a}\right)$. Тогда после замены $p = -ar$ получим

$$f_2(s) = -ae^{hs} \cdot \int_0^{-\frac{s}{a}} \kappa(r)e^{ahr} dr, \quad s < 0.$$

Подставляя вместо s выражение $(x - at)$ и вспоминая условие 2), находим функцию $u(x, t)$:

Ответ:

$$u(x, t) = f_2(x - at) = \begin{cases} 0, & x \geq at > 0; \\ -ae^{h(x-at)} \cdot \int_0^{-\frac{x-at}{a}} \kappa(r)e^{ahr} dr, & x < at. \end{cases}$$

№ 456. Найти решение общей задачи для волнового уравнения на полупрямой с краевым условием первого рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0; \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0; \\ u(0, t) = \mu(t), & t > 0. \end{cases} \quad (5.32)$$

Представим решение данной задачи в виде суммы решений двух вспомогательных задач:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x, t), & x, t > 0; \\ v(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0; \\ v_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0; \\ v(0, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0, & x, t > 0; \\ w(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ w_t(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ w(0, t) = \mu(t), & t > 0. \end{cases} \quad (5.33)$$

В силу линейности этих задач, функция

$$u(x, t) \equiv v(x, t) + w(x, t)$$

является решением исходной задачи (5.32).

С другой стороны, обе задачи (5.33) мы уже решили в №№ 551 и 553. Воспользуемся их результатами:

$$v(x, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s, \tau) ds d\tau,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x, t)$ есть нечётные по x продолжения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x, t)$ на всю ось $x \in (-\infty, +\infty)$.

$$w(x, t) = \begin{cases} 0, & x \geq at > 0; \\ \mu\left(-\frac{x-at}{a}\right), & x < at. \end{cases}$$

Поэтому для решения $u(x, t) \equiv v(x, t) + w(x, t)$ задачи (5.32) получаем:

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s, \tau) ds d\tau +$$

$$+ \begin{cases} 0, & x \geq at > 0; \\ \mu\left(-\frac{x-at}{a}\right), & x < at, \end{cases}$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x, t)$ есть нечётные по x продолжения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x, t)$ на всю ось $x \in (-\infty, +\infty)$.

№ 457. Найти решение общей задачи для волнового уравнения на полупрямой с краевым условием первого рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0; \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0; \\ u_x(0, t) = \nu(t), & t > 0. \end{cases} \quad (5.34)$$

Представим решение данной задачи в виде суммы решений двух вспомогательных задач:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x, t), & x, t > 0; \\ v(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0; \\ v_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0; \\ v_x(0, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0, & x, t > 0; \\ w(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ w_t(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ w_x(0, t) = \nu(t), & t > 0. \end{cases} \quad (5.35)$$

В силу линейности этих задач, функция

$$u(x, t) \equiv v(x, t) + w(x, t)$$

является решением исходной задачи (5.34).

С другой стороны, обе задачи (5.35) мы уже решили в номерах 552 и 554. Воспользуемся их результатами:

$$v(x, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s, \tau) ds d\tau,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x, t)$ есть чётные по x продолжения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x, t)$ на всю ось $x \in (-\infty, +\infty)$.

$$w(x, t) = \begin{cases} 0, & x \geq at > 0; \\ -a \int_0^{-\frac{x-at}{a}} \nu(r) dr, & x < at. \end{cases}$$

Поэтому для решения $u(x, t) \equiv v(x, t) + w(x, t)$ задачи (5.34) получаем:

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s, \tau) ds d\tau +$$

$$+ \begin{cases} 0, & x \geq at > 0; \\ -a \int_0^{\frac{x-at}{a}} \nu(r) dr, & x < at, \end{cases}$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x, t)$ есть чётные по x продолжения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x, t)$ на всю ось $x \in (-\infty, +\infty)$.

6. Уравнение теплопроводности на прямой и полупрямой

6.1. Формула Пуассона

В n -мерном Евклидовом пространстве $E_n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}$ рассмотрим задачу Коши для простейшего случая уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = f(x, t), & x \in E_n, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in E_n. \end{cases} \quad (6.1)$$

Определение 6.1. Решение задачи Коши (6.1) задаётся **формулой Пуассона**:

$$u(x, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{E_n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{E_n} \frac{e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (6.2)$$

где $|x - \xi|^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - \xi_k)^2$.

В частном случае, когда $n = 1$, формула Пуассона принимает вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (6.3)$$

6.2. Примеры решения задач

№ 582. Найти решение задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае однородного краевого условия второго рода (условие теплоизолированного конца):

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0; \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, & x \in (-\infty, +\infty), \quad t > 0; \\ v(x, 0) = \varphi_1(x), & x \in (-\infty, +\infty), \end{cases} \quad (6.5)$$

где функция $\varphi_1(x)$ построена по функции $\varphi(x)$ её **чётным продолжением** на всю числовую ось:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при } x \geq 0; \\ \varphi(-x), & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (6.6)$$

Выясним, каким условиям удовлетворяет $v(x, t)$ на промежутке $x \in (0, +\infty)$. Так как v – решение (6.5), то:

1) из первого равенства (6.5) следует, что

$$v_t - a^2 v_{xx} = 0, \quad x \in (0, +\infty), \quad t > 0;$$

2) из второго равенства (6.5) следует, что

$$v(x, 0) = \varphi_1(x) \equiv \varphi(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad t > 0.$$

Убедимся, что для решения $v(x, t)$ вспомогательной задачи (6.5) справедливо соотношение

$$v_x(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Для этого воспользуемся формулой Пуассона для случая $f \equiv 0$:

$$v(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi_1(\xi) d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \cdot \varphi(\xi) d\xi.$$

Тогда

$$v_x(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left[\left(-\frac{2(x-\xi)}{4a^2 t} \right) \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + \left(-\frac{2(x+\xi)}{4a^2 t} \right) \cdot e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] \cdot \varphi(\xi) d\xi,$$

откуда для $v_x(0, t)$ получаем:

$$v_x(0, t) = \frac{1}{4a^3 t \sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \underbrace{\left(\xi e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} - \xi e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} \right)}_{=0} \cdot \varphi(\xi) d\xi = 0.$$

Таким образом, найденная функция $v(x, t)$ удовлетворяет, помимо условий $v_t - a^2 v_{xx} = 0$ и $v(x, 0) = \varphi(x)$, краевому условию

$$v_x(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение** $v(x, t)$ **вспомогательной задачи** (6.5) **является также решением задачи** (6.4) **на полупрямой**¹⁰:

$$u(x, t) \equiv v(x, t), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \cdot \varphi(\xi) d\xi.$$

№ 586. *Найти решение задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае однородного краевого условия второго рода:*

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (6.7)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x, t), & x \in (-\infty, +\infty), \quad t > 0; \\ v(x, 0) = 0, & x \in (-\infty, +\infty), \end{cases} \quad (6.8)$$

где функция $f_1(x, t)$ построена по функции $f(x, t)$ её **чётным продолжением** на всю числовую ось:

$$f_1(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & \text{при } x \geq 0; \\ f(-x, t), & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (6.9)$$

Выясним, каким условиям удовлетворяет $v(x, t)$ на промежутке $x \in (0, +\infty)$. Так как v – решение (6.8), то:

1) из первого равенства (6.8) следует, что

$$v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x, t) \equiv f(x, t), \quad x \in (0, +\infty), \quad t > 0;$$

2) из второго равенства (6.8) следует, что

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in (0, +\infty), \quad t > 0.$$

Убедимся, что для решения $v(x, t)$ вспомогательной задачи (6.8) справедливо соотношение

$$v_x(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Для этого воспользуемся формулой Пуассона для случая $\varphi(x) \equiv 0$:

$$v(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (6.10)$$

¹⁰То, что другого решения у задачи (6.4) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

Тогда

$$v_x(x, t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{-2}{4a^2(t-\tau)} \cdot \frac{(x-\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + (x+\xi)e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

откуда для $v_x(0, t)$ получаем:

$$v_x(0, t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{-2}{4a^2(t-\tau)} \cdot \overbrace{\frac{-\xi e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}} + \xi e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}}}{=0}}^{=0} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau = 0.$$

Таким образом, найденная функция $v(x, t)$ удовлетворяет, помимо условий $v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x, t)$ и $v(x, 0) = 0$, ещё и краевому условию

$$v_x(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение $v(x, t)$ вспомогательной задачи (6.8) является также решением задачи (6.7) на полупрямой¹¹:**

Ответ:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

№ 588. Найти решение задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + hu = f(x, t), & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (6.11)$$

Шаг 1. Избавление от младшего слагаемого.

Чтобы избавиться от слагаемого hu , которое отличает данную задачу от уже решённой в № 586, сделаем **замену**:

$$w(x, t) = u(x, t) \cdot e^{ht} \implies w_t = (u_t + hu) \cdot e^{ht}. \quad (6.12)$$

Умножим уравнение $u_t - a^2 u_{xx} + hu = f(x, t)$ на e^{ht} и получим для новой функции w

$$w_t - a^2 w_{xx} = f(x, t) \cdot e^{ht}.$$

Таким образом, введённая функция $w(x, t)$ является решением задачи:

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = f_1(x, t) \equiv f(x, t) \cdot e^{ht}, & x > 0, t > 0; \\ w(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ w_x(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (6.13)$$

Шаг 2. Решение полученной задачи.

Решение этой задачи мы получили в № 586. Воспользуемся результатом:

$$w(x, t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot \underbrace{f_1(\xi, \tau)}_{f(\xi, \tau) \cdot e^{h\tau}} d\xi d\tau.$$

¹¹То, что другого решения у задачи (6.7) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

Возвращаясь к функции $u(x, t) = w(x, t) \cdot e^{-ht}$, получаем:

Ответ:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi, \tau) \cdot e^{-h(t-\tau)} d\xi d\tau.$$

№ 574^M. Показать, что функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi, \quad (6.14)$$

где $\varphi(x)$ – непрерывная ограниченная на $\mathbb{R}$ функция, является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0. \end{cases} \quad (6.15)$$

Шаг 1. Формальное дифференцирование (6.14).

Найдём формально (то есть не задумываясь над правомочностью этих действий) производные от функции $u(x, t)$, входящие в уравнение (6.14).

$$u_t = -\frac{1}{4a\sqrt{\pi} t^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t^2} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi;$$

далее, так как

$$\frac{d}{dx} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} = -\frac{2(x-\xi)}{4a^2 t} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}, \quad \frac{d^2}{dx^2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} = \left(-\frac{1}{2a^2 t} + \frac{(x-\xi)^2}{4a^4 t^2} \right) \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}},$$

то для u_{xx} получаем выражение

$$u_{xx} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2a^2 t} + \frac{(x-\xi)^2}{4a^4 t^2} \right) \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi.$$

Шаг 2. Подстановка формальных производных в уравнение теплопроводности. Подставив найденные формальные производные u_t и u_{xx} в уравнение $u_t - a^2 u_{xx} = 0$, видим, что окрашенные одинаково слагаемые друг друга сокращают, и уравнение превращается в верное равенство:

$$\begin{aligned} u_t - a^2 u_{xx} = & -\frac{1}{4a\sqrt{\pi} t^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t^2} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi - \\ & - a^2 \cdot \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2a^2 t} + \frac{(x-\xi)^2}{4a^4 t^2} \right) \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi \equiv 0. \end{aligned}$$

Шаг 3. Формальная подстановка решения в начальное условие.

Функция $u(x, t)$, заданная формулой (6.14), не определена при $t = 0$. Однако её можно доопределить в начальный момент времени по непрерывности, то есть считать её равной в момент $t = 0$ её пределу при $t \rightarrow 0 + 0$:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0+0} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi = \\ &= \left[\begin{array}{l} \xi = x + 2a\eta\sqrt{t}, \\ d\xi = 2a\sqrt{t} d\eta \end{array} \Rightarrow \right] = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \cdot \varphi(x + 2a\eta\sqrt{t}) d\eta = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \cdot \lim_{t \rightarrow 0+0} \varphi(x + 2a\eta\sqrt{t}) d\eta = \varphi(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \varphi(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = \\ &= \left[\text{как интеграл Эйлера–Пуассона} \right] = \varphi(x). \end{aligned}$$

Таким образом, мы убедились, что формула (6.14) действительно задаёт решение задачи (6.15), если все формальные действия Шагов 1 и 3 являются правомочными.

В теоретическом курсе все проведенные формальные манипуляции полностью обосновываются при соответствующих предположениях (см., например, [2]).

№ 581. Найти решение задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае однородного краевого условия первого рода:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0; \\ u(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (6.16)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, & x \in (-\infty, +\infty), t > 0; \\ v(x, 0) = \varphi_1(x), & x \in (-\infty, +\infty), \end{cases} \quad (6.17)$$

где функция $\varphi_1(x)$ построена по функции $\varphi(x)$ её **нечётным продолжением** на всю числовую ось:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при } x \geq 0; \\ -\varphi(-x), & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (6.18)$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x, t)$ на промежутке $x \in (0, +\infty)$. Так как v – решение (6.17), то:

1) из первого равенства (6.17) следует, что

$$v_t - a^2 v_{xx} = 0, \quad x \in (0, +\infty), t > 0;$$

2) из второго равенства (6.17) следует, что

$$v(x, 0) = \varphi_1(x) \equiv \varphi(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad t > 0.$$

Убедимся, что для решения $v(x, t)$ вспомогательной задачи (6.17) справедливо соотношение

$$v(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Для этого воспользуемся формулой Пуассона для случая $f \equiv 0$:

$$v(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \cdot \varphi_1(\xi) d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right) \cdot \varphi(\xi) d\xi.$$

Тогда для $v(0, t)$ получаем:

$$v(0, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \underbrace{\left(e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} \right)}_{=0} \cdot \varphi(\xi) d\xi.$$

Таким образом, найденная функция $v(x, t)$ удовлетворяет, помимо условий $v_t - a^2 v_{xx} = 0$ и $v(x, 0) = \varphi(x)$, краевому условию

$$v(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение $v(x, t)$ вспомогательной задачи (6.17) является также решением задачи (6.16) на полупрямой**¹²:

$$u(x, t) \equiv v(x, t), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right) \cdot \varphi(\xi) d\xi.$$

№ 583. Найти решение задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + hu = 0, & x > 0, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0; \\ u(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (6.19)$$

Шаг 1. Избавление от младшего слагаемого.

Чтобы избавиться от слагаемого hu , которое отличает данную задачу от уже решённой в № 581, сделаем **замену**:

$$w(x, t) = u(x, t) \cdot e^{ht} \quad \implies \quad w_t = (u_t + hu) \cdot e^{ht}. \quad (6.20)$$

Умножим уравнение $u_t - a^2 u_{xx} + hu = 0$ на e^{ht} и получим для новой функции w

$$w_t - a^2 w_{xx} = 0.$$

¹²То, что другого решения у задачи (6.16) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

Таким образом, введённая функция $w(x, t)$ является решением задачи:

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0, & x > 0, t > 0; \\ w(x, 0) = \varphi_1(x) \equiv \varphi(x) \cdot e^{h \cdot 0}, & x \geq 0; \\ w(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (6.21)$$

Шаг 2. Решение полученной задачи.

Решение этой задачи мы получили в № 581. Воспользуемся результатом:

$$w(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \cdot \underbrace{\varphi_1(\xi)}_{=\varphi(\xi)} d\xi.$$

Возвращаясь к функции $u(x, t) = w(x, t) \cdot e^{-ht}$, получаем:

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \cdot \varphi(\xi) d\xi.$$

№ 585. Найти решение задачи для уравнения теплопроводности :

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ u(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (6.22)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x, t), & x \in (-\infty, +\infty), t > 0; \\ v(x, 0) = 0, & x \in (-\infty, +\infty), \end{cases} \quad (6.23)$$

где функция $f_1(x, t)$ построена по функции $f(x, t)$ её **нечётным продолжением** на всю числовую ось:

$$f_1(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & \text{при } x \geq 0; \\ -f(-x, t), & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (6.24)$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x, t)$ на промежутке $x \in (0, +\infty)$. Так как v – решение (6.23), то:

1) из первого равенства (6.23) следует, что

$$v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x, t) \equiv f(x, t), \quad x \in (0, +\infty), t > 0;$$

2) из второго равенства (6.23) следует, что

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in (0, +\infty), t > 0.$$

Убедимся, что для решения $v(x, t)$ вспомогательной задачи (6.23) справедливо соотношение

$$v(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Для этого воспользуемся формулой Пуассона для случая $\varphi(x) \equiv 0$:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ &= \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Тогда для $v(0, t)$ получаем:

$$v(0, t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} \overbrace{\frac{e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}}^{=0} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau = 0.$$

Таким образом, найденная функция $v(x, t)$ удовлетворяет, помимо условий $v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x, t)$ и $v(x, 0) = 0$, ещё и краевому условию

$$v(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение $v(x, t)$ вспомогательной задачи (6.23) является также решением задачи (6.22) на полупрямой¹³:**

Ответ:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

№ 587. Найти решение задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + hu = f(x, t), & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ u(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (6.26)$$

Шаг 1. Избавление от младшего слагаемого.

Чтобы избавиться от слагаемого hu , которое отличает данную задачу от уже решённой в № 585, сделаем **замену**:

$$w(x, t) = u(x, t) \cdot e^{ht} \implies w_t = (u_t + hu) \cdot e^{ht}. \quad (6.27)$$

Умножив уравнение $u_t - a^2 u_{xx} + hu = f$ на e^{ht} , получим для новой функции w

$$w_t - a^2 w_{xx} = f(x, t) \cdot e^{ht}.$$

Таким образом, введённая функция $w(x, t)$ является решением задачи:

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = f_1(x, t) \equiv f(x, t) \cdot e^{ht}, & x > 0, t > 0; \\ w(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ w(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (6.28)$$

¹³То, что другого решения у задачи (6.22) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

Шаг 2. Решение полученной задачи.

Решение этой задачи мы получили в № 585. Воспользуемся результатом:

$$w(x, t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot \underbrace{f_1(\xi, \tau)}_{f(\xi, \tau) \cdot e^{h\tau}} d\xi d\tau.$$

Возвращаясь к функции $u(x, t) = w(x, t) \cdot e^{-ht}$, получаем:

Ответ:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi, \tau) \cdot e^{-h(t-\tau)} d\xi d\tau.$$

№ 584. Найти решение задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + hu = 0, & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0; \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (6.29)$$

Шаг 1. Избавление от младшего слагаемого.

Чтобы избавиться от слагаемого hu , которое отличает данную задачу от уже решённой в № 581, сделаем **замену**:

$$w(x, t) = u(x, t) \cdot e^{ht} \implies w_t = (u_t + hu) \cdot e^{ht}. \quad (6.30)$$

Умножим уравнение $u_t - a^2 u_{xx} + hu = 0$ на e^{ht} и получим для новой функции w

$$w_t - a^2 w_{xx} = 0.$$

Таким образом, введённая функция $w(x, t)$ является решением задачи:

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0, & x > 0, t > 0; \\ w(x, 0) = \varphi_1(x) \equiv \varphi(x) \cdot e^{h \cdot 0}, & x \geq 0; \\ w_x(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (6.31)$$

Шаг 2. Решение полученной задачи.

Решение этой задачи мы получили в № 582. Воспользуемся результатом:

$$w(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \cdot \underbrace{\varphi_1(\xi)}_{=\varphi(\xi)} d\xi.$$

Возвращаясь к функции $u(x, t) = w(x, t) \cdot e^{-ht}$, получаем:

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \cdot \varphi(\xi) d\xi.$$

7. Метод Фурье для однородных уравнений на отрезке $[0, l]$

7.1. Разложение функции в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля

Введем для упрощения формулировок определение классических краевых операторов.

Определение 7.1. Классическими краевыми операторами для отрезка $x \in [0, l]$ называются операторы:

	на левом конце $x = 0$	на правом конце $x = l$
I-го рода	$\Gamma_0(X) = X(0)$	$\Gamma_l(X) = X(l);$
II-го рода	$\Gamma_0(X) = X'(0)$	$\Gamma_l(X) = X'(l);$
III-го рода	$\Gamma_0(X) = X'(0) - hX(0)$	$\Gamma_l(X) = X'(l) + hX(l),$
		$h > 0.$

Определение 7.2. Задача определения пары $\{\lambda, X(x)\}$, где $X(x) \not\equiv 0$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & x \in (0, l); \\ \Gamma_0(X) = \Gamma_l(X) = 0, \end{cases} \quad (7.1)$$

где $\Gamma_0(X)$, $\Gamma_l(X)$ – классические краевые операторы, называется **задачей Штурма–Лиувилля**.

При этом те значения λ , при которых (7.2) имеет нетривиальное решение $X(x)$, называются **собственными значениями задачи** (7.2), а сама функция $X(x)$ – **собственной функцией задачи Штурма–Лиувилля** (7.2).

Теорема 7.1 (В.А. Стеклов).

Пусть $\{X_k\}_{k=1}^\infty$ – ортогональная система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля.

Тогда $\forall f(x) \in C^2[a, b]$, удовлетворяющей краевым условиям, $\exists \{c_k\}_{k=1}^\infty$:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(x),$$

причём последний ряд сходится к $f(x)$ абсолютно и равномерно на $[a, b]$, а для c_k верно представление

$$c_k = \frac{(f, X_k)}{\|X_k\|^2} = \frac{\int_a^b f(x) X_k(x) dx}{\int_a^b X_k^2(x) dx} \quad (7.2)$$

В силу данной теоремы, нам достаточно один раз вычислить $\|X_k\|^2$ для каждой задачи Штурма–Лиувилля, чтобы знать вид коэффициентов разложения c_k .

7.2. Примеры решения задач

№ 643. Найти решение $u(x, t)$ начально-краевой задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \\ u(0, t) = u(l, t) = 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0, t) = u(l, t) = 0$ в виде $U(x, t) = X(x)T(t)$.

Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (7.4)$$

Подставим $U(x, t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2 X(x)T(t) \neq 0$:

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (7.5)$$

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (7.6)$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad t > 0. \quad (7.7)$$

Задача (7.5)–(7.6) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (7.5) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) \quad \text{при } \lambda > 0; \quad (7.8)$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} \quad \text{при } \lambda < 0; \quad (7.9)$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \quad \text{при } \lambda = 0; \quad (7.10)$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x)$. Поэтому из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda} l = \pi n$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.11)$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.12)$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = -c_1$, $\Rightarrow X(x) = 2c_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} x$. Поэтому из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow X(x) = c_1 x$. Поэтому из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin \left(\frac{\pi n x}{l} \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

задачи (7.5), (7.6). Стало быть, рассматривать задачу (7.7) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \quad t > 0. \quad (7.13)$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n \cos \left(\frac{\pi n a}{l} t \right) + B_n \sin \left(\frac{\pi n a}{l} t \right), \quad t > 0, \quad (7.14)$$

где A_n, B_n – произвольные постоянные.

Шаг 2. Решаем задачу (7.3).

Будем искать решение задачи (7.3) в виде $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$, т.е.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi n x}{l} \right) \left(A_n \cos \left(\frac{\pi n a}{l} t \right) + B_n \sin \left(\frac{\pi n a}{l} t \right) \right). \quad (7.15)$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальные условия $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$. Для функции $u(x, t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \quad (7.16)$$

$$\psi(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n a \sqrt{\lambda_n} X_n(x). \quad (7.17)$$

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящие в начальные условия, разлагаются в ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x), \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n X_n(x), \quad (7.18)$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n , β_n . Для этого домножим (7.18) на $X_m = \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right)$ скалярно в смысле $L_2[0, l]$:

$$(\varphi, X_m) = \alpha_m \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx = \frac{\alpha_m}{2} \int_0^l \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi mx}{l}\right)\right) dx = \frac{l\alpha_m}{2},$$

откуда

$$\alpha_n = \frac{2}{l}(\varphi, X_n) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx. \quad (7.19)$$

Аналогично, для β_n имеем представление:

$$\beta_n = \frac{2}{l}(\psi, X_n) = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx. \quad (7.20)$$

То есть α_n , β_n вычисляются в точности по формуле (7.2)¹⁴.

Таким образом, для коэффициентов A_n , B_n из представления (7.15) решения $u(x, t)$, сопоставляя (7.16) – (7.18), получим:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx; \quad (7.21)$$

$$B_n = \frac{\beta_n}{a\sqrt{\lambda_n}} = \frac{2}{a\pi n} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx. \quad (7.22)$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (7.15) найденные коэффициенты A_n , B_n из (7.21), (7.22).

№ 649^M. Найти решение $u(x, t)$ уравнения¹⁵

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (7.23)$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0, t) = u_x(l, t) = 0$ в виде $U(x, t) = X(x)T(t)$.

Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X(0) = X'(l) = 0. \quad (7.24)$$

¹⁴Можно было воспользоваться формулой (7.2) сразу. Для этого нам пришлось бы вычислить $\|X_n\|^2$, то есть тот же самый интеграл $\int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx$.

¹⁵Значок ^M после номера задачи мы будем ставить в тех случаях, когда модифицируем задание соответствующего номера задачника [1].

Подставим $U(x, t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2 X(x)T(t) \neq 0$:

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (7.25)$$

$$X(0) = X'(l) = 0, \quad (7.26)$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad t > 0. \quad (7.27)$$

Задача (7.25)–(7.26) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (7.25) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) \quad \text{при } \lambda > 0; \quad (7.28)$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} \quad \text{при } \lambda < 0; \quad (7.29)$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \quad \text{при } \lambda = 0. \quad (7.30)$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) \Rightarrow X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda} l = \pi \left(\frac{1}{2} + k\right)$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.31)$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \sin \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.32)$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = -c_1$, $\Rightarrow X(x) = 2c_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} x \Rightarrow X'(x) = 2c_1 \sqrt{-\lambda} \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda} x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow X(x) = c_1 x \Rightarrow X'(x) = c_1$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} \right)^2, \quad X_n(x) = \sin \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

задачи (7.25), (7.26). Стало быть, рассматривать уравнение (7.27) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \quad t > 0. \quad (7.33)$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n \cos \left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l} t \right) + B_n \sin \left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l} t \right), \quad t > 0, \quad (7.34)$$

где A_n, B_n – произвольные постоянные.

Шаг 2. Решаем задачу (7.23).

Будем искать решение задачи (7.23) в виде $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$, т.е.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x \right) \left(A_n \cos \left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l} t \right) + B_n \sin \left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l} t \right) \right). \end{aligned} \quad (7.35)$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальные условия $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$. Для функции $u(x, t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \quad (7.36)$$

$$\psi(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n a \sqrt{\lambda_n} X_n(x). \quad (7.37)$$

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящие в начальные условия, разлагаются в ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x), \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n X_n(x). \quad (7.38)$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n , β_n . Для этого домножим (7.38) на $X_m = \sin \left(\frac{\pi(2m-1)}{2l} x \right)$ скалярно в смысле $L_2[0, l]$:

$$\begin{aligned} (\varphi, X_m) &= \alpha_m \int_0^l \sin^2 \left(\frac{\pi(2m-1)}{2l} x \right) dx = \frac{\alpha_m}{2} \int_0^l \left(1 - \cos \left(\frac{\pi(2m-1)}{l} x \right) \right) dx = \\ &= \frac{\alpha_m}{2} \int_0^l dx = \frac{l \alpha_m}{2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\alpha_n = \frac{2}{l}(\varphi, X_n) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x \right) dx. \quad (7.39)$$

Аналогично для β_n имеем представление:

$$\beta_n = \frac{2}{l}(\psi, X_n) = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x \right) dx. \quad (7.40)$$

Таким образом, для коэффициентов A_n , B_n из представления (7.35) решения $u(x, t)$ имеем:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x \right) dx; \quad (7.41)$$

$$B_n = \frac{\beta_n}{a\sqrt{\lambda_n}} = \frac{4}{a\pi(2n-1)} \int_0^l \psi(x) \sin \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x \right) dx. \quad (7.42)$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (7.35) найденные коэффициенты A_n , B_n из (7.41), (7.46).

№ 645. Найти решение $u(x, t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2l} + \sin \frac{3\pi x}{2l}. \end{cases} \quad (7.43)$$

Данная задача – частный случай рассмотренной в №649^M. Поэтому мы можем сразу воспользоваться формулами (7.35), (7.41), (7.46) для получения ответа. Найдём по (7.41) коэффициенты A_n :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l x \sin \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x \right) dx = \\ &= \frac{2}{l} \left[-\frac{2lx}{(2n-1)\pi} \cos \left(\frac{(2n-1)\pi}{2l} x \right) \Big|_{x=0}^{x=l} + \frac{2l}{(2n-1)\pi} \int_0^l \cos \left(\frac{(2n-1)\pi}{2l} x \right) dx \right] = \\ &= \frac{2}{l} \left[\frac{4l^2}{(2n-1)^2 \pi^2} \sin \left(\frac{(2n-1)\pi}{2l} x \right) \Big|_{x=0}^{x=l} \right] = \frac{2}{l} \left[\frac{4l^2}{(2n-1)^2 \pi^2} (-1)^{n+1} \right] = \\ &= \frac{8l}{(2n-1)^2 \pi^2} (-1)^{n+1}. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Для того чтобы найти B_n , заметим, что заданная функция $\psi(x)$ уже разложена в ряд по функциям $X_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)$:

$$\psi(x) = \sin \frac{\pi x}{2l} + \sin \frac{3\pi x}{2l}. \quad (7.45)$$

Следовательно, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\beta_3 = \beta_4 = \dots = 0$, откуда, так как $B_n = \beta_n \frac{2l}{\pi(2n-1)a}$,

$$B_1 = \frac{2l}{\pi a}, \quad B_2 = \frac{2l}{3\pi a}, \quad B_3 = B_4 = \dots = 0. \quad (7.46)$$

Подставим найденные A_n и B_n в

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right) \left(A_n \cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right) \right).$$

Получим ответ:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right) \left(\frac{8l}{(2n-1)^2\pi^2} (-1)^{n+1} \cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right) + \right. \\ \left. + \frac{2l}{a\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right) \sin\left(\frac{\pi a}{2l}t\right) + \frac{2l}{3a\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{2l}x\right) \sin\left(\frac{3\pi a}{2l}t\right) \right).$$

№ 649. Найти решение $u(x, t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (7.47)$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ в виде $U(x, t) = X(x)T(t)$.

Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X'(0) = X'(l) = 0. \quad (7.48)$$

Подставим $U(x, t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2 X(x)T(t) \neq 0$:

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (7.49)$$

$$X'(0) = X'(l) = 0, \quad (7.50)$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad t > 0. \quad (7.51)$$

Задача (7.49)–(7.50) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (7.49) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) \quad \text{при } \lambda > 0; \quad (7.52)$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} \quad \text{при } \lambda < 0; \quad (7.53)$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \quad \text{при } \lambda = 0. \quad (7.54)$$

- При $\lambda > 0$ имеем

$$X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} x) - c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} x).$$

И из краевого условия $X'(0) = 0$ следует, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow X(x) = c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) \Rightarrow X'(x) = -c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda} l = \pi n$, откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.55)$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.56)$$

- При $\lambda < 0$ имеем

$$X'(x) = c_1 \sqrt{-\lambda} e^{\sqrt{-\lambda} x} - c_2 \sqrt{-\lambda} e^{-\sqrt{-\lambda} x}.$$

И из краевого условия $X'(0) = 0$ следует, что $c_1 = c_2$, $\Rightarrow X(x) = 2c_1 \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda} x \Rightarrow X'(x) = 2c_1 \sqrt{-\lambda} \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda} x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow X(x) = c_2 \Rightarrow X'(x) = 0$, и второе краевое условие $X'(l) = 0$ выполняется автоматически, т.е. данная задача Штурма–Лиувилля имеет собственное число, равное нулю и соответствующую ему собственную функцию:

$$\lambda_0 = 0, \quad X_0(x) = 1. \quad (7.57)$$

Заметим, что эта пара (собственное число–собственная функция) может быть записана в том же виде, что и λ_n в (7.55) и X_n в (7.56) при $n = 0$:

$$\lambda_0 = \frac{\pi^2 0^2}{l^2} = 0, \quad X_0 = \cos\left(\frac{\pi 0 x}{l}\right) = 1.$$

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

задачи (7.49), (7.50). Стало быть, рассматривать задачу (7.51) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \quad t > 0. \quad (7.58)$$

При $n = 0$ это уравнение вырождается в

$$T_0''(t) = 0, \quad t > 0.$$

Его решение:

$$T_0 = A_0 + B_0 t, \quad (7.59)$$

где A_0, B_0 – произвольные постоянные.

При $n > 0$ решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right), \quad t > 0, \quad (7.60)$$

где A_n, B_n – произвольные постоянные.

Шаг 2. Решаем задачу (7.47).

Будем искать решение задачи (7.47) в виде $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$, т.е.

$$u(x, t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \left(A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) \right). \quad (7.61)$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальные условия $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$. Для функции $u(x, t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n(0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \quad (7.62)$$

$$\psi(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n'(0) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} B_n X_n(x). \quad (7.63)$$

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящие в начальные условия, разлагаются в ряд Фурье по косинусам:

$$\varphi(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{\pi n x}{l}, \quad \psi(x) = \frac{\beta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos \frac{\pi n x}{l}, \quad (7.64)$$

где коэффициенты α_n , β_n имеют вид:

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx, \quad \beta_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx.$$

(Конечно, эти формулы для вычисления α_n , β_n мы могли получить тем же способом, что и формулы (7.39), (7.40), но мы воспользовались знанием стандартных формул для ряда Фурье).

Таким образом, для коэффициентов A_n , B_n из представления (7.61) решения $u(x, t)$, имеем:

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) dx, \quad A_n = \alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx, \quad n > 0,$$

$$B_0 = \frac{\beta_0}{2} = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) dx, \quad B_n = \frac{l\beta_n}{\pi n a} = \frac{2l}{\pi n a} \int_0^l \psi(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx, \quad n > 0.$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (7.61) найденные коэффициенты A_n , B_n .

№ 688. Найти решение $u(x, t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (7.65)$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0, t) = u_x(l, t) = 0$ в виде $U(x, t) = X(x)T(t)$.

Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X(0) = X'(l) = 0. \quad (7.66)$$

Подставим $U(x, t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2 X(x)T(t) \neq 0$:

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (7.67)$$

$$X(0) = X'(l) = 0, \quad (7.68)$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad t > 0. \quad (7.69)$$

Задача (7.67)–(7.68) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (7.67) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) \quad \text{при } \lambda > 0; \quad (7.70)$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} \quad \text{при } \lambda < 0; \quad (7.71)$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \quad \text{при } \lambda = 0. \quad (7.72)$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) \Rightarrow X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda} l = \pi \left(\frac{1}{2} + k\right)$, откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.73)$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \sin \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.74)$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_1 = -c_2$, $\Rightarrow X(x) = 2c_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} x \Rightarrow X'(x) = 2c_1 \sqrt{-\lambda} \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda} x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow X(x) = c_1 x \Rightarrow X'(x) = c_1$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений $\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} \right)^2$, $X_n(x) = \sin \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x \right)$, $n \in \mathbb{N}$ задачи (7.67), (7.68). Стало быть, рассматривать задачу (7.27) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$T'_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \quad t > 0. \quad (7.75)$$

Решение этого линейного однородного уравнения первого порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{(\pi(2n-1)a)^2}{(2l)^2} t}, \quad (7.76)$$

где A_n – произвольные постоянные.

Шаг 2. Решаем задачу (7.65).

Будем искать решение задачи (7.65) в виде $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$, т.е.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x \right) A_n e^{-\frac{(\pi(2n-1)a)^2}{(2l)^2} t}. \quad (7.77)$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальные условия $u(x, 0) = \varphi(x)$. Для функции $u(x, t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \quad (7.78)$$

Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x). \quad (7.79)$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n . Для этого домножим (7.79) на $X_m = \sin \left(\pi \left(-\frac{1}{2} + m \right) x \right)$ скалярно в смысле $L_2[0, l]$:

$$\begin{aligned} (\varphi, X_m) &= \alpha_m \int_0^l \sin^2 \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x \right) dx = \frac{\alpha_m}{2} \int_0^l \left(1 - \cos \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x \right) \right) dx = \\ &= \frac{\alpha_m}{2} \int_0^l dx = \frac{l\alpha_m}{2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\alpha_n = \frac{2}{l} (\varphi, X_n) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x \right) dx. \quad (7.80)$$

Таким образом, для коэффициентов A_n из представления (7.78) решения $u(x, t)$ имеем:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x \right) dx. \quad (7.81)$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (7.78) найденные коэффициенты A_n из (7.81).

№ 687^M. Найти решение $u(x, t)$ начально-краевой задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u(0, t) = u(l, t) = 0. \end{cases} \quad (7.82)$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0, t) = u(l, t) = 0$ в виде $U(x, t) = X(x)T(t)$.

Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (7.83)$$

Подставим $U(x, t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2 X(x)T(t) \neq 0$:

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (7.84)$$

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (7.85)$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad t > 0. \quad (7.86)$$

Задача (7.84)–(7.85) есть задача Штурма–Лиувилля (мы уже изучали её в № 643). Общее решение уравнения (7.84) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) \quad \text{при } \lambda > 0; \quad (7.87)$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} \quad \text{при } \lambda < 0; \quad (7.88)$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \quad \text{при } \lambda = 0. \quad (7.89)$$

- При $\lambda > 0$ существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.90)$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.91)$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений.
- При $\lambda = 0$ данная задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

задачи (7.84), (7.85). Стало быть, рассматривать задачу (7.86) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \quad t > 0. \quad (7.92)$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t} \quad t > 0, \quad (7.93)$$

где A_n – произвольные постоянные.

Шаг 2. Решаем задачу (7.82).

Будем искать решение задачи (7.82) в виде $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$, т.е.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t}. \quad (7.94)$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $u(x, 0) = \varphi(x)$. Для функции $u(x, t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x). \quad (7.95)$$

Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд Фурье по синусам:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad (7.96)$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \quad (7.97)$$

Сопоставляя (7.95) и (7.96), (7.97), получим для коэффициентов $A_n \equiv b_n$ представление:

$$A_n \equiv b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \quad (7.98)$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (7.94) найденные коэффициенты A_n из (7.98).

№ 687. Найти решение $u(x, t)$ начально-краевой задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = Ax, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0. \end{cases} \quad (7.99)$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0, t) = u(l, t) = 0$ в виде $U(x, t) = X(x)T(t)$.

Мы уже несколько раз решали эту задачу, в частности в № 687^M. У неё есть бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Поэтому для функций $T_n(t)$ у нас получается семейство задач:

$$T'_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \quad t > 0. \quad (7.100)$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t}, \quad t > 0, \quad (7.101)$$

где A_n – произвольные постоянные.

Шаг 2. Решаем задачу (7.99).

Будем искать решение задачи (7.99) в виде $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$, т.е.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t}. \quad (7.102)$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $u(x, 0) = \varphi(x)$. Но в данном случае функция $\varphi(x)$ нам задана:

$$\varphi(x) = Ax.$$

Поэтому воспользуемся формулами, полученными в № 687^M:

$$A_n \equiv b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx, \quad (7.103)$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \quad (7.104)$$

Найдём коэффициенты $A_n \equiv b_n$:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l Ax \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx = -A \frac{2l}{\pi n l} \left(x \cos \frac{\pi n x}{l} \Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx \right) = \\ &= -A \frac{2}{\pi n} \left((l(-1)^n - 0) - \frac{l}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \Big|_{x=0}^{x=l} \right) = \frac{2Al(-1)^{n+1}}{\pi n}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$A_n = \frac{2Al(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Подставляем найденные коэффициенты A_n в формулу (7.102):

$$u(x, t) = \frac{2Al}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t}.$$

№ 691. Найти решение $u(x, t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) + hu(l, t) = 0, \end{cases} \quad h > 0. \quad (7.105)$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u_x(0, t) = u_x(l, t) + hu(l, t) = 0$ в виде $U(x, t) = X(x)T(t)$.

Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X'(0) = X'(l) + hX(l) = 0. \quad (7.106)$$

Подставим $U(x, t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2 X(x)T(t) \neq 0$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (7.107)$$

$$X'(0) = X'(l) + hX(l) = 0, \quad (7.108)$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad t > 0. \quad (7.109)$$

Задача (7.107)–(7.108) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (7.107) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) \quad \text{при } \lambda > 0; \quad (7.110)$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} \quad \text{при } \lambda < 0; \quad (7.111)$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \quad \text{при } \lambda = 0; \quad (7.112)$$

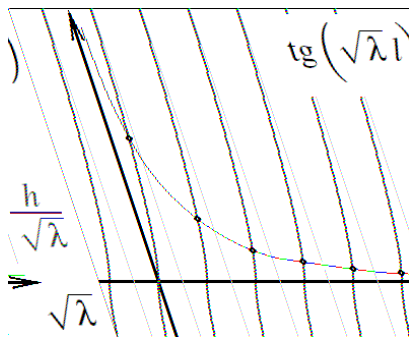
- При $\lambda > 0$ имеем

$$X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} x) - c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

И из краевого условия $X'(0) = 0$ следует, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow X(x) = c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) \Rightarrow X'(x) = -c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} x)$.

Поэтому из второго краевого условия $X'(l) + hX(l) = 0$ получаем, что $-\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} l) + h \cos(\sqrt{\lambda} l) = 0$, откуда (очевидно, косинус не может быть равен нулю, так как тогда синус равнялся бы (± 1) , и равенство не было бы выполнено)

$$\sqrt{\lambda} \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} l) = h. \quad (7.113)$$



Это уравнение, как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много решений λ_n , $n \in \mathbb{N}$. Сами эти решения явным образом выписать нельзя, но любое может быть найдено со сколь угодно большой точностью численно. Мы их искать не будем, удовлетворившись знанием, что они есть, и их можно найти.

Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи

Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \quad \sqrt{\lambda_n} \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_n} l) = h, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.114)$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n} x), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.115)$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow X(x) = c_2 \Rightarrow X'(x) = 0$, и второе краевое условие $X'(l) + hX(l) = 0$ даёт требование $c_2 = 0$, т.е. данная задача Штурма–Лиувилля при $\lambda = 0$ также не имеет нетривиальных решений.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n \quad - \quad \text{решения уравнения (7.113),} \quad X_n(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n} x), \quad n \in \mathbb{N},$$

задачи (7.107), (7.108). Стало быть, рассматривать задачу (7.109) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \quad t > 0. \quad (7.116)$$

Общее решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n e^{-\sqrt{\lambda_n} t}, \quad t > 0, \quad (7.117)$$

где A_n – произвольные постоянные.

Шаг 2. Решаем задачу (7.105).

Будем искать решение задачи (7.105) в виде $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$, т.е.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left(\sqrt{\lambda_n} x \right) \cdot A_n e^{-\sqrt{\lambda_n} t}. \quad (7.118)$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $u(x, 0) = \varphi(x)$. Для функции $u(x, t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x). \quad (7.119)$$

Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x). \quad (7.120)$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты $\alpha_n \equiv A_n$. Для этого домножим (7.120) на $X_m = \cos(\sqrt{\lambda_m} x)$ скалярно в смысле $L_2[0, l]$ и учтём, что система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля всегда является ортогональной в смысле этого скалярного произведения:

$$\begin{aligned} (\varphi, X_m) &= \alpha_m \int_0^l \cos^2 \left(\sqrt{\lambda_m} x \right) dx = \frac{\alpha_m}{2} \int_0^l \left(1 + \cos \left(2\sqrt{\lambda_m} x \right) \right) dx = \\ &= \frac{\alpha_m}{2} \left(l + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_m}} \sin \left(2\sqrt{\lambda_m} x \right) \Big|_{x=0}^{x=l} \right) = \frac{\alpha_m}{2} \left(l + \frac{\sin \left(2\sqrt{\lambda_m} l \right)}{2\sqrt{\lambda_m}} \right), \end{aligned}$$

откуда, пользуясь тождествами $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}$, $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, получаем:

$$\begin{aligned} l + \frac{\sin \left(2\sqrt{\lambda_m} l \right)}{2\sqrt{\lambda_m}} &= \left[\sqrt{\lambda_m} = \frac{h}{\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_m} l)} \right] = l + \frac{\sin \left(\sqrt{\lambda_m} l \right) \cos \left(\sqrt{\lambda_m} l \right)}{h} \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_m} l) = \\ &= l + \frac{\sin^2 \left(\sqrt{\lambda_m} l \right)}{h} = l + \frac{1 - \cos^2 \left(\sqrt{\lambda_m} l \right)}{h} = \left[\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right] = \\ &= l + \frac{1 - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\sqrt{\lambda_m} l \right)}}{h} = \left[\operatorname{tg}^2 \left(\sqrt{\lambda_m} l \right) = \frac{h^2}{\lambda_m} \right] = l + \frac{1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_m + h^2}}{h} = \\ &= l + \frac{h^2}{h(\lambda_m + h^2)} = \frac{l(\lambda_m + h^2) + h}{\lambda_m + h^2}. \end{aligned}$$

В итоге для коэффициентов $\alpha_n \equiv A_n$ получаем равенство:

$$A_n = \alpha_n = 2 \frac{\lambda_n + h^2}{l(\lambda_n + h^2) + h} (\varphi, X_n) = 2 \frac{\lambda_n + h^2}{l(\lambda_n + h^2) + h} \int_0^l \varphi(x) \cos(\sqrt{\lambda_n} l) dx.$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (7.118) найденные коэффициенты A_n .

Ответ: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2 \frac{\lambda_n + h^2}{l(\lambda_n + h^2) + h} \int_0^l \varphi(x) \cos(\sqrt{\lambda_n} l) dx \right\} \cos(\sqrt{\lambda_n} x) e^{-\sqrt{\lambda_n} t}.$

8. Метод Фурье для неоднородных уравнений

№ 699^M. Рассмотрим неоднородную начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с однородными краевыми условиями второго рода.

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (8.1)$$

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (8.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l]. \quad (8.3)$$

Шаг 1. Решение задачи Штурма–Лиувилля.

Рассмотрим задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (8.4)$$

$$X'(0) = X'(l) = 0. \quad (8.5)$$

Задача (8.4)–(8.5) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (8.4) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) \quad \text{при } \lambda > 0; \quad (8.6)$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} \quad \text{при } \lambda < 0; \quad (8.7)$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \quad \text{при } \lambda = 0. \quad (8.8)$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow X(x) = c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) \Rightarrow X'(x) = -c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda} l = \pi k$, откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8.9)$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \frac{2}{l} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (8.10)$$

(множитель $\frac{2}{l}$ появляется, чтобы система этих функций превратилась из ортогональной в ортонормированную).

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = c_2$, $\Rightarrow X(x) = 2c_1 \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda} x \Rightarrow X'(x) = 2c_1 \sqrt{-\lambda} \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda} x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow X(x) = c_2$. Второе краевое условие $X'(l) = 0$ выполнено, поэтому задача Штурма–Лиувилля (8.4)–(8.5) имеет собственное число, равное нулю: $\lambda_0 = 0$. Ему соответствует собственная функция $X_0(x) \equiv \frac{1}{l}$.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений задачи (8.4)–(8.5):

$$\lambda_0 = 0, \quad X_0(x) \equiv 1; \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Шаг 2. Будем искать решение уравнения $u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t)$ с краевыми условиями $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ в виде $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n(t)$, где функции $X_n(x)$ имеют вид:

$$X_0(x) \equiv \frac{1}{l}, \quad X_n(x) = \frac{2}{l} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right). \quad (8.11)$$

Заметим сразу, что каждое слагаемое приведённого ряда удовлетворяет краевым условиям (8.2), что достаточно (если ряд допускает почленный переход к пределу при $x \rightarrow 0+0$, $x \rightarrow l-0$) для того, чтобы функция $u(x, t)$, определённая таким образом, также удовлетворяла краевым условиям (8.2).

Пусть функция $f(x, t)$ разложена при каждом $t \in [0, T]$ в ряд Фурье по косинусам

$$f(x, t) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) f_n(t). \quad (8.12)$$

При этом, в силу теоремы Стеклова (стр. 64),

$$f_n(t) = (f, X_n) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \quad (8.13)$$

Тогда уравнение (8.1) приобретает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} (X_n(x) T_n'(t) - a^2 X_n''(x) T_n(t)) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Для его выполнения достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} T_0'(t) &= \frac{f_0(t)}{2}, & \text{для } n = 0, \\ X_n(x) T_n'(t) - a^2 X_n''(x) T_n(t) &= f_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) & \text{для } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} T_0'(t) &= \frac{f_0(t)}{2} \cdot l && \text{для } n = 0, \\ \left(T_n'(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t) \right) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) &= f_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) && \text{для } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Это заведомо выполнено, если

$$T_0'(t) = \frac{f_0(t)}{2} \cdot l \quad \text{для } n = 0, \quad (8.14)$$

$$T_n'(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t) = f_n(t) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}. \quad (8.15)$$

Итак, мы получили условия на функции $T_n(t)$, достаточные для того, чтобы функция $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ была (если ряд – «хороший») решением уравнения $u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t)$ с краевыми условиями $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$.

Шаг 3. Решаем задачу (8.1) – (8.3).

Из условий задачи (8.1) – (8.3) мы ещё не использовали только начальные условия $u(x, 0) = \varphi(x)$. Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд по косинусам

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad x \in [0, l], \quad (8.16)$$

где

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \quad (8.17)$$

Подставим функцию $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ (опять-таки в предположении, что ряд – «хороший») в начальное условие:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Для выполнения этого равенства достаточно, чтобы

$$T_0(0) = \frac{\varphi_0}{2} \quad \text{для } n = 0,$$

$$T_n(0) = \varphi_n \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, для функций $T_n(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} T_0'(t) = \frac{f_0(t)}{2} \cdot l \\ T_0(0) = \frac{\varphi_0}{2} \end{cases} \quad \text{для } n = 0, \quad (8.18)$$

$$\begin{cases} T_n'(t) + \frac{(\pi na)^2}{l^2} T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n \end{cases} \quad \text{для } n \in \mathbb{N}. \quad (8.19)$$

Эти задачи Коши имеют единственное решение при любых $f_n \in C[0, T]$ и любых значениях $\varphi_n \in \mathbb{R}$.

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить решения задач (8.18), (8.19) в формулу $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)$.

№ 699^{M2}. Решить неоднородную начально-краевую задачу для уравнения колебаний с однородными краевыми условиями второго рода.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (8.20)$$

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (8.21)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l]. \quad (8.22)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, l]. \quad (8.23)$$

Шаг 1. Решение задачи Штурма–Лиувилля.

Этот шаг полностью повторяет Шаг 1. задачи № 699^M.

Шаг 2. Будем искать решение уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$ с краевыми условиями $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ в виде $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n(t)$, где функции $X_n(x)$ имеют вид:

$$X_0(x) \equiv 1, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right). \quad (8.24)$$

Пусть функция $f(x, t)$ разложена при каждом $t \in [0, T]$ в ряд Фурье по косинусам

$$f(x, t) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) f_n(t). \quad (8.25)$$

При этом коэффициенты данного ряда Фурье ищутся по формуле:

$$f_n(t) = (f, X_n) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx. \quad (8.26)$$

Тогда уравнение (8.20) приобретает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} (X_n(x) T_n''(t) - a^2 X_n''(x) T_n(t)) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right).$$

Для его выполнения достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} T_0''(t) &= \frac{f_0(t)}{2} && \text{для } n = 0, \\ X_n(x)T_n''(t) - a^2 X_n''(x)T_n(t) &= f_n(t) \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) && \text{для } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} T_0''(t) &= \frac{f_0(t)}{2} && \text{для } n = 0, \\ \left(T_n''(t) + \frac{(\pi na)^2}{l^2} T_n(t)\right) \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) &= f_n(t) \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) && \text{для } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Это заведомо выполнено, если

$$T_0''(t) = \frac{f_0(t)}{2} \quad \text{для } n = 0, \quad (8.27)$$

$$T_n''(t) + \frac{(\pi na)^2}{l^2} T_n(t) = f_n(t) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}. \quad (8.28)$$

Итак, мы получили условия на функции $T_n(t)$, достаточные для того, чтобы функция $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)$ была (если ряд – «хороший») решением уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$ с краевыми условиями $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$.

Шаг 3. Решаем задачу (8.20) – (8.23).

Из условий задачи (8.20) – (8.23) мы ещё не использовали только начальные условия $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$.

Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, входящие в начальные условия, разлагаются в ряд по косинусам

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right), \quad x \in [0, l], \quad (8.29)$$

где

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx. \quad (8.30)$$

$$\psi(x) = \frac{\psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right), \quad x \in [0, l], \quad (8.31)$$

где

$$\psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx. \quad (8.32)$$

Подставим функцию $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)$ (опять-таки в предположении, что ряд – «хороший») в начальные условия:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0) \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) &= \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right); \\ \sum_{n=0}^{\infty} T'_n(0) \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) &= \frac{\psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right). \end{aligned}$$

Для выполнения этих равенств достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} T_0(0) &= \frac{\varphi_0}{2}, & T'_0(0) &= \frac{\psi_0}{2} & \text{для } n = 0, \\ T_n(0) &= \varphi_n, & T'_n(0) &= \psi_n & \text{для } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Таким образом, из (8.27), (8.28) и (8.29) – (8.30), для функций $T_n(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} T''_0(t) = \frac{f_0(t)}{2}, \\ T_0(0) = \frac{\varphi_0}{2}, \\ T'_0(0) = \frac{\psi_0}{2} \end{cases} \quad \text{для } n = 0, \quad (8.33)$$

$$\begin{cases} T''_n(t) + \frac{(\pi na)^2}{l^2} T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(0) = \varphi_n, \\ T'_n(0) = \psi_n \end{cases} \quad \text{для } n \in \mathbb{N}. \quad (8.34)$$

Эти задачи Коши имеют единственное решение при любых $f_n \in C[0, T]$ и любых значениях $\varphi_n \in \mathbb{R}$, $\psi_n \in \mathbb{R}$.

При $n = 0$:

$$T_0(t) = \frac{\varphi_0}{2} + \int_0^t \left(\frac{\psi_0}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\tau f_0(\varkappa) d\varkappa \right) d\tau. \quad (8.35)$$

При $n \in \mathbb{N}$:

сначала решаем однородное уравнение:

$$T''_n(t) + \frac{(\pi na)^2}{l^2} T_n(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$T_n(t) = c_1 \sin \frac{\pi nat}{l} + c_2 \cos \frac{\pi nat}{l}.$$

Метод вариации постоянной позволяет нам искать решение уравнения (8.34) в виде

$$T_n(t) = c_1(t) \sin \frac{\pi nat}{l} + c_2(t) \cos \frac{\pi nat}{l},$$

где $c_{1,2}(t)$ – есть решения системы

$$\begin{cases} c_1'(t) \sin \frac{\pi nat}{l} + c_2'(t) \cos \frac{\pi nat}{l} = 0; \\ \frac{\pi na}{l} (c_1'(t) \cos \frac{\pi nat}{l} - c_2'(t) \sin \frac{\pi nat}{l}) = f_n(t). \end{cases}$$

откуда

$$c_1'(t) = \frac{l}{\pi na} f_n(t) \cos \frac{\pi nat}{l}, \quad c_2'(t) = -\frac{l}{\pi na} f_n(t) \sin \frac{\pi nat}{l}.$$

С учётом начальных условий $T_n(0) = \varphi_n$, $T_n'(0) = \psi_n$ окончательно получаем

$$c_1(t) = \frac{l\psi_n}{\pi na} + \frac{l}{\pi na} \int_0^t f_n(\tau) \cos \frac{\pi na\tau}{l} d\tau, \quad c_2(t) = \varphi_n - \frac{l}{\pi na} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{\pi na\tau}{l} d\tau.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \varphi_n \sin \frac{\pi nat}{l} + \psi_n \frac{l}{\pi na} \cos \frac{\pi nat}{l} + \\ &+ \frac{l}{\pi na} \left(\sin \frac{\pi nat}{l} \int_0^t f_n(\tau) \cos \frac{\pi na\tau}{l} d\tau - \cos \frac{\pi nat}{l} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{\pi na\tau}{l} d\tau \right). \end{aligned} \quad (8.36)$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить (8.35), (8.36) в формулу

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos \left(\frac{\pi nx}{l} \right).$$

№ 654^M (классический способ). Решить неоднородную начально-краевую задачу для уравнения колебаний с однородными краевыми условиями второго рода.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (8.37)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (8.38)$$

$$u(x, 0) = \frac{\beta - \alpha}{l} x + \alpha, \quad x \in [0, l], \quad (8.39)$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l]. \quad (8.40)$$

$$(8.41)$$

Шаг 1. Решение задачи Штурма–Лиувилля.
Рассмотрим задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (8.42)$$

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (8.43)$$

Задача (8.42)–(8.43) есть задача Штурма–Лиувилля. Её решение нам уже известно:

$$\lambda_n = \frac{(\pi n x)^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Шаг 2. Будем искать решение уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$ с краевыми условиями $u(0, t) = u(l, t) = 0$ в виде $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n(t)$, где функции $X_n(x)$ имеют вид:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8.44)$$

Пусть функция $f(x)$ разложена в ряд Фурье по синусам (так как в данном примере f не зависит от t , то f_n – тут просто константы, не зависящие от t)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) f_n. \quad (8.45)$$

При этом, коэффициенты данного ряда Фурье ищутся по формулам:

$$f_n = (f, X_n) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \quad (8.46)$$

Тогда уравнение (8.37) приобретает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} (X_n(x) T_n''(t) - a^2 X_n''(x) T_n(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Для его выполнения достаточно, чтобы

$$X_n(x) T_n''(t) - a^2 X_n''(x) T_n(t) = f_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \quad \text{для } n \in \mathbb{N},$$

то есть

$$\left(T_n''(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t)\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = f_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Это заведомо выполнено, если

$$T_n''(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t) = f_n \quad \text{для } n \in \mathbb{N}. \quad (8.47)$$

Итак, мы получили условия на функции $T_n(t)$, достаточные для того, чтобы функция $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)$ была (если ряд – «хороший») решением уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$ с краевыми условиями $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Шаг 3. Решаем задачу (8.37) – (8.40).

Из условий задачи (8.37) – (8.40) мы ещё не использовали только начальные условия $u(x, 0) = \varphi(x) = \frac{\alpha - \beta}{l}x - \alpha$, $u_t(x, 0) = \psi = 0$. Найдём разложение функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, входящих в начальные условия, в ряд по синусам

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right), \quad \text{где} \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx. \quad (8.48)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right), \quad \text{где} \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx. \quad (8.49)$$

Подставим функцию $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)$ (опять-таки в предположении, что ряд – «хороший») в начальные условия:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right); \\ \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(0) \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right). \end{aligned}$$

Для выполнения этих равенств достаточно, чтобы

$$T_n(0) = \varphi_n \quad T'_n(0) = \psi_n \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, из (8.47) и (8.48) – (8.49), для функций $T_n(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} T''_n(t) + \frac{(\pi na)^2}{l^2} T_n(t) = f_n, \\ T_n(0) = \varphi_n, \\ T'_n(0) = \psi_n \end{cases} \quad \text{для } n \in \mathbb{N}. \quad (8.50)$$

Эти задачи Коши имеют единственное решение при любых $f_n \in \mathbb{R}$ и любых значениях $\varphi_n \in \mathbb{R}$, $\psi_n \in \mathbb{R}$.

Найдём φ_n , ψ_n из (8.48), (8.49) с учётом, что

$$\varphi(x) = \frac{\beta - \alpha}{l}x + \alpha, \quad \psi = 0.$$

$$\begin{aligned}
\varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx = \frac{2}{l} \left(-\frac{l}{\pi n} \frac{\beta - \alpha}{l} x \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \Big|_{x=0}^{x=l} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{l}{\pi n} \frac{\alpha - \beta}{l} \int_0^l \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx + \alpha \int_0^l \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx \right) = \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_0 \\
&= \frac{2}{l} \left(-\frac{(-1)^n l (\beta - \alpha)}{\pi n} + \frac{\alpha l (1 - (-1)^n)}{\pi n} \right) = \frac{2}{\pi n} (\alpha - (-1)^n \beta),
\end{aligned}$$

$$\psi_n = 0.$$

При $n \in \mathbb{N}$:
 сначала решаем однородное уравнение:

$$T_n''(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$T_n(t) = c_1 \sin \frac{\pi n a t}{l} + c_2 \cos \frac{\pi n a t}{l}.$$

Простой вид правой части позволяет нам угадать частное решение неоднородного уравнения (8.50) в виде константы: $\frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2}$. Поэтому общее решение (8.50) имеет вид:

$$T_n(t) = c_1 \sin \frac{\pi n a t}{l} + c_2 \cos \frac{\pi n a t}{l} + \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2}.$$

Из начального условия $T_n'(0) = \psi_n = 0$ следует, что

$$c_1 = 0.$$

А второе начальное условие $T_n(0) = \varphi_n = \frac{2}{\pi n} (\alpha - (-1)^n \beta)$ даёт нам

$$c_2 = \frac{2}{\pi n} (\alpha - (-1)^n \beta) - \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2}.$$

Таким образом,

$$T_n(t) = \left(\frac{2}{\pi n} (\alpha - (-1)^n \beta) - \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2} \right) \cos \frac{\pi n a t}{l} + \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2}. \quad (8.51)$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить (8.51) в формулу

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Получим ответ:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi n} (\alpha - (-1)^n \beta) - \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2} \right) \cos \frac{\pi n a t}{l} \sin \left(\frac{\pi n x}{l} \right) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2} \sin \left(\frac{\pi n x}{l} \right).$$

№ 654^M (короткий способ, использующий вид данных функций).

Решить неоднородную начально-краевую задачу для уравнения колебаний с однородными краевыми условиями второго рода.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (8.52)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (8.53)$$

$$u(x, 0) = \frac{\beta - \alpha}{l} x + \alpha, \quad x \in [0, l]. \quad (8.54)$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l]. \quad (8.55)$$

$$(8.56)$$

Шаг 1. Так как правые части всех равенств в этой задаче не зависят от времени, будем искать решение задачи в виде суммы

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x).$$

Найдём $w = w(x)$ такую, чтобы

$$w_{tt} - a^2 w_{xx} = f(x), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (8.57)$$

$$w(0, t) = w(l, t) = 0, \quad t > 0. \quad (8.58)$$

Раз $w = w(x)$, то $w_{tt} = 0$, и задача (8.57) – (8.58) принимает более простой вид:

$$w''(x) = - \frac{f(x)}{a^2}, \quad x \in (0, l), \quad (8.59)$$

$$w(0) = w(l) = 0. \quad (8.60)$$

Проинтегрируем уравнение (8.59) один раз:

$$w'(x) = - \frac{1}{a^2} \int_0^x f(s) ds + c_1.$$

Проинтегрируем второй раз:

$$w(x) = - \frac{1}{a^2} \int_0^x \int_0^y f(s) ds dy + c_1 x + c_2.$$

Из краевого условия $w(0) = 0$ получаем, что $c_2 = 0$, а из $w(l) = 0$, – что

$$0 = -\frac{1}{a^2} \int_0^l \int_0^y f(s) ds dy + c_1 l,$$

откуда

$$c_1 = \frac{1}{la^2} \int_0^l \int_0^y f(s) ds dy.$$

Итак, функция $w(x)$ нам полностью известна:

$$w(x) = \frac{x}{la^2} \int_0^l \int_0^y f(s) ds dy - \frac{1}{a^2} \int_0^x \int_0^y f(s) ds dy. \quad (8.61)$$

Тогда для $v(x, t) = u(x, t) - w(x)$ получается задача

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (8.62)$$

$$v(0, t) = v(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (8.63)$$

$$v(x, 0) = \frac{\beta - \alpha}{l} x + \alpha - w(x) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad (8.64)$$

$$v_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l]. \quad (8.65)$$

Такую задачу мы уже умеем решать (см. номер 643, семинар 6). Её ответ:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) \left(A_n \cos\left(\frac{\pi na}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi na}{l} t\right) \right), \quad (8.67)$$

где A_n и B_n задаются равенствами

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx; \quad (8.68)$$

$$B_n = \frac{2}{a\pi n} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx. \quad (8.69)$$

В нашем случае $\psi = 0$, а $\varphi = \frac{\beta - \alpha}{l} x + \alpha - w(x)$, откуда

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left(\frac{\beta - \alpha}{l} x + \alpha - w(x) \right) \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx, \quad B_n = 0,$$

и функция v имеет вид

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi n a t}{l}\right). \quad (8.70)$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x)$$

найденные функции v и w из (8.70) и (8.61).

№ 667. Решить неоднородную начально-краевую задачу для уравнения колебаний с однородными краевыми условиями второго рода.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (8.71)$$

$$u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (8.72)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l]. \quad (8.73)$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l]. \quad (8.74)$$

Шаг 1. Решение задачи Штурма–Лиувилля.

Этот шаг мы проходили, когда решали задачу № 649^M. Результат: бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Шаг 2. Будем искать решение уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$ с краевыми условиями $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ в виде $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n(t)$, где функции $X_n(x)$ имеют вид:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right). \quad (8.75)$$

Пусть функция $f(x, t)$ разложена при каждом $t \in [0, T]$ в ряд Фурье по функциям $X_n(x)$:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) f_n(t). \quad (8.76)$$

При этом коэффициенты данного ряда Фурье ищутся по формулам (как мы убедились, решая № 649^M):

$$f_n(t) = (f, X_n) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) dx. \quad (8.77)$$

Тогда уравнение (8.71) приобретает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} (X_n(x) T_n''(t) - a^2 X_n''(x) T_n(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right).$$

Для его выполнения достаточно, чтобы

$$X_n(x)T_n''(t) - a^2 X_n''(x)T_n(t) = f_n(t) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) \quad \text{для } n \in \mathbb{N},$$

то есть при всех натуральных n

$$\left(T_n''(t) + \frac{\pi^2(2n-1)^2 a^2}{4l^2} T_n(t)\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) = f_n(t) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right).$$

Это заведомо выполнено, если

$$T_n''(t) + \frac{\pi^2(2n-1)^2 a^2}{4l^2} T_n(t) = f_n(t) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}. \quad (8.78)$$

Итак, мы получили условия на функции $T_n(t)$, достаточные для того, чтобы функция $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ была (если ряд – «хороший») решением уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$ с краевыми условиями $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$.

Шаг 3. Решаем задачу (8.71) – (8.74).

Из условий задачи (8.71) – (8.74) мы ещё не использовали только начальные условия $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$. Функции $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, входящие в начальные условия, разлагаются в ряд по функциям $X_n(x)$

$$\varphi(x) \equiv 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right), \quad x \in [0, l] \quad \text{где } \varphi_n = 0, \quad (8.79)$$

$$\psi(x) \equiv 0 = \frac{\psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad x \in [0, l] \quad \text{где } \psi_n = 0. \quad (8.80)$$

Подставим функцию $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right)$ (опять-таки в предположении, что ряд – «хороший») в начальные условия:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) = 0; \\ \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) = 0. \end{aligned}$$

Для выполнения этих равенств достаточно, чтобы

$$T_n(0) = \varphi_n = 0, \quad T_n'(0) = \psi_n = 0 \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, из (8.78) и (8.79) – (8.80) для функций $T_n(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} T_n''(t) + \frac{\pi^2(2n-1)^2 a^2}{4l^2} T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(0) = 0, \\ T_n'(0) = 0. \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8.81)$$

Эти задачи Коши имеют единственное решение при любых $f_n \in C[0, T]$ и любых значениях $\varphi_n \in \mathbb{R}$, $\psi_n \in \mathbb{R}$.

Сначала решаем однородное уравнение

$$T_n''(t) + \frac{\pi^2(2n-1)^2 a^2}{4l^2} T_n(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$T_n(t) = c_1 \sin \frac{\pi(2n-1)at}{2l} + c_2 \cos \frac{\pi(2n-1)at}{2l}.$$

Метод вариации постоянной позволяет нам искать решение уравнения (8.81) в виде

$$T_n(t) = c_1(t) \sin \frac{\pi(2n-1)at}{2l} + c_2(t) \cos \frac{\pi(2n-1)at}{2l},$$

где $c_{1,2}(t)$ – есть решения системы

$$\begin{cases} c_1'(t) \sin \frac{\pi(2n-1)at}{2l} + c_2'(t) \cos \frac{\pi(2n-1)at}{2l} = 0; \\ \frac{\pi(2n-1)a}{2l} \left(c_1'(t) \cos \frac{\pi(2n-1)at}{2l} - c_2'(t) \sin \frac{\pi(2n-1)at}{2l} \right) = f_n(t), \end{cases}$$

откуда

$$\begin{aligned} c_1'(t) &= \frac{2l}{\pi(2n-1)a} f_n(t) \cos \frac{\pi(2n-1)at}{2l}, \\ c_2'(t) &= - \frac{2l}{\pi(2n-1)a} f_n(t) \sin \frac{\pi(2n-1)at}{2l}. \end{aligned}$$

С учётом начальных условий $T_n(0) = \varphi_n = 0$, $T_n'(0) = \psi_n = 0$ окончательно получаем

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \frac{2l}{\pi(2n-1)a} \int_0^t f_n(\tau) \cos \frac{\pi(2n-1)a\tau}{2l} d\tau, \\ c_2(t) &= - \frac{2l}{\pi(2n-1)a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{\pi(2n-1)a\tau}{2l} d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \frac{2l}{\pi(2n-1)a} \left(\sin \frac{\pi(2n-1)at}{2l} \int_0^t f_n(\tau) \cos \frac{\pi(2n-1)a\tau}{2l} d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \cos \frac{\pi(2n-1)at}{2l} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{\pi(2n-1)a\tau}{2l} d\tau \right). \quad (8.82) \end{aligned}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить (8.82) в формулу

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2l}.$$

9. Метод Фурье в случае неоднородных краевых условий

9.1. Сведение неоднородных краевых условий к однородным

Рассмотрим неоднородную начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с неоднородными краевыми условиями первого рода.

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (9.1)$$

$$u(0, t) = \mu(t) \quad t > 0, \quad (9.2)$$

$$u(l, t) = \nu(t), \quad t > 0, \quad (9.3)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l]. \quad (9.4)$$

Её легко свести к аналогичной задаче, но уже с однородными краевыми условиями. Это делается при помощи подходящей замены переменных:

$$v(x, t) = u(x, t) - \left(\frac{l-x}{l} \mu(t) + \frac{x}{l} \nu(t) \right). \quad (9.5)$$

В самом деле, при $x = 0$

$$v(0, t) = u(0, t) - \left(\frac{l}{l} \mu(t) + \frac{0}{l} \nu(t) \right) = \mu(t) - \mu(t) = 0.$$

А при $x = l$

$$v(l, t) = u(l, t) - \left(\frac{l-l}{l} \mu(t) + \frac{l}{l} \nu(t) \right) = \nu(t) - \nu(t) = 0.$$

Что же после такой замены произойдёт с уравнением и начальным условием? Изучим этот вопрос. Поскольку

$$u_t = v_t + \left(\frac{l-x}{l} \mu'(t) + \frac{x}{l} \nu'(t) \right), \quad u_{xx} = v_{xx},$$

то уравнение примет вид

$$v_t - a^2 v_{xx} = f(x, t) - \left(\frac{l-x}{l} \mu'(t) + \frac{x}{l} \nu'(t) \right) = f_1(x, t).$$

Начальное условие преобразуется следующим образом:

$$v(x, 0) = \varphi(x) - \left(\frac{l-x}{l} \mu(0) + \frac{x}{l} \nu(0) \right) = \varphi_1(x).$$

Итак, исходная задача свелась к задаче нахождения функции $v(x, t)$ с однородными краевыми условиями:

$$\begin{aligned} v_t - a^2 v_{xx} &= f_1(x, t), & x \in (0, l), \quad t > 0, \\ v(0, t) &= 0, & t > 0, \\ v(l, t) &= 0, & t > 0, \\ v(x, 0) &= \varphi_1(x), & x \in [0, l], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_1(x, t) &= f(x, t) - \left(\frac{l-x}{l} \mu'(t) + \frac{x}{l} \nu'(t) \right), \\ \varphi_1(x) &= \varphi(x) - \left(\frac{l-x}{l} \mu(0) + \frac{x}{l} \nu(0) \right). \end{aligned}$$

Замечание 9.1. В случае любых краевых условий, кроме условий II-го рода на обоих концах, можно подобрать функцию

$$w(x, t) = (a_1 x + b_1) \mu(t) + (a_2 x + b_2) \nu(t)$$

так, чтобы для функции $v(x, t) = u(x, t) - w(x, t)$ выполнялись однородные краевые условия того же вида.

Отдельный случай представляют собой условия II-го рода на обоих концах. В этом случае функцию w в виде $w(x, t) = (a_1 x + b_1) \mu(t) + (a_2 x + b_2) \nu(t)$ найти можно не всегда, но всегда её можно найти в виде

$$w(x, t) = (a_1 x^2 + b_1 x) \mu(t) + (a_2 x^2 + b_2 x) \nu(t).$$

Пример 9.1. Краевые условия

$$u_x(0, t) - hu(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) = \nu(t)$$

сводятся к однородным так:

найдем $w(x, t) = (a_1 x + b_1) \mu(t) + (a_2 x + b_2) \nu(t)$, чтобы она удовлетворяла краевым условиям

$$w_x(0, t) - hw(0, t) = \mu(t), \quad w_x(l, t) = \nu(t).$$

Тогда

$$w(0, t) = b_1 \mu(t) + b_2 \nu(t), \quad w_x(0, t) = a_1 \mu(t) + a_2 \nu(t), \quad w_x(l, t) = a_1 \mu(t) + a_2 \nu(t).$$

Из второго краевого условия

$$\nu(t) = a_1 \mu(t) + a_2 \nu(t)$$

получаем:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1.$$

А из первого краевого условия с учётом найденных $a_{1,2}$

$$\mu(t) = (a_1 \mu(t) + a_2 \nu(t)) - h(b_1 \mu(t) + b_2 \nu(t)) = -hb_1 \mu(t) + (1 - hb_2) \nu(t)$$

находим:

$$b_1 = -\frac{1}{h}, \quad b_2 = \frac{1}{h}.$$

Наконец,

$$w(x, t) = -\frac{1}{h} \mu(t) + \frac{xh + 1}{h} \nu(t).$$

Пример 9.2. Краевые условия II-го рода

$$u_x(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) = \nu(t)$$

сводятся к однородным так:

найдем $w(x, t) = (a_1x^2 + b_1x)\mu(t) + (a_2x^2 + b_2x)\nu(t)$, чтобы она удовлетворяла краевым условиям

$$w_x(0, t) = \mu(t), \quad w_x(l, t) = \nu(t).$$

Тогда

$$w_x(0, t) = b_1\mu(t) + b_2\nu(t), \quad w_x(l, t) = (2a_1l + b_1)\mu(t) + (2a_2l + b_2)\nu(t).$$

Из первого краевого условия

$$\mu(t) = b_1\mu(t) + b_2\nu(t)$$

получаем:

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 0.$$

А из второго краевого условия с учётом найденных $b_{1,2}$

$$\nu(t) = (2a_1l + b_1)\mu(t) + (2a_2l + b_2)\nu(t) = (2a_1l + 1)\mu(t) + 2a_2l\nu(t)$$

находим:

$$a_1 = -\frac{1}{2l}, \quad a_2 = \frac{1}{2l}.$$

Наконец,

$$w(x, t) = \left(x - \frac{x^2}{2l}\right)\mu(t) + \frac{x^2}{2l}\nu(t).$$

9.2. Примеры решения задач

№ 659. Свести задачу

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (9.6)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = \nu(t), \quad t > 0, \quad (9.7)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad (9.8)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, l] \quad (9.9)$$

к задаче с однородными краевыми условиями.

Шаг № 1. Построение вспомогательной функции.

Найдём $w(x, t) = (a_1x + b_1)\mu(t) + (a_2x + b_2)\nu(t)$, чтобы она удовлетворяла краевым условиям

$$w(0, t) = \mu(t), \quad w(l, t) = \nu(t).$$

Вид искомой функции $w(x, t)$ даёт на концах отрезка

$$w(0, t) = b_1\mu(t) + b_2\nu(t), \quad w(l, t) = (a_1l + b_1)\mu(t) + (a_2l + b_2)\nu(t).$$

Из первого краевого условия

$$\mu(t) = b_1\mu(t) + b_2\nu(t)$$

получаем:

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 0.$$

А из второго краевого условия с учётом найденных $b_{1,2}$

$$\nu(t) = (a_1 l + b_1)\mu(t) + (a_2 l + b_2)\nu(t) = (a_1 l + 1)\mu(t) + a_2 l \nu(t)$$

находим:

$$a_1 = -\frac{1}{l}, \quad a_2 = \frac{1}{l}.$$

Наконец,

$$w(x, t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu(t) + \frac{x}{l}\nu(t) = \frac{l-x}{l}\mu(t) + \frac{x}{l}\nu(t).$$

Для построенной таким образом функции $w(x, t)$ имеем:

$$w_t = \frac{l-x}{l}\mu'(t) + \frac{x}{l}\nu'(t), \quad w_{tt} = \frac{l-x}{l}\mu''(t) + \frac{x}{l}\nu''(t),$$

$$w_{xx} \equiv 0, \quad w(x, 0) = \frac{l-x}{l}\mu(0) + \frac{x}{l}\nu(0).$$

Поэтому $w(x, t)$ удовлетворяет равенствам:

$$w_{tt} - w_{xx} = \frac{l-x}{l}\mu''(t) + \frac{x}{l}\nu''(t), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (9.10)$$

$$w(0, t) = \mu(t), \quad w(l, t) = \nu(t), \quad t > 0, \quad (9.11)$$

$$w(x, 0) = \frac{l-x}{l}\mu(0) + \frac{x}{l}\nu(0), \quad x \in [0, l], \quad (9.12)$$

$$w_t(x, 0) = \frac{l-x}{l}\mu'(0) + \frac{x}{l}\nu'(0), \quad x \in [0, l]. \quad (9.13)$$

Шаг № 2. Сведение к задаче с однородными краевыми условиями.

Для функции $v(x, t) = u(x, t) - w(x, t)$, вычитая из (9.6) – (9.9) равенства (9.10) – (9.13), получим задачу

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = -\frac{l-x}{l}\mu''(t) - \frac{x}{l}\nu''(t), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (9.14)$$

$$v(0, t) = v(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (9.15)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x) - \left(\frac{l-x}{l}\mu(0) + \frac{x}{l}\nu(0)\right), \quad x \in [0, l], \quad (9.16)$$

$$v_t(x, 0) = \psi(x) - \left(\frac{l-x}{l}\mu'(0) + \frac{x}{l}\nu'(0)\right), \quad x \in [0, l]. \quad (9.17)$$

№ 660. Свести задачу

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (9.18)$$

$$u_x(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = \nu(t), \quad t > 0, \quad (9.19)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad (9.20)$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l]. \quad (9.21)$$

к задаче с однородными краевыми условиями.

Шаг № 1. Построение вспомогательной функции.

Найдём $w(x, t) = (a_1x + b_1)\mu(t) + (a_2x + b_2)\nu(t)$, чтобы она удовлетворяла краевым условиям

$$w_x(0, t) = \mu(t), \quad w(l, t) = \nu(t)$$

Вид искомой функции $w(x, t)$ даёт на концах отрезка

$$w_x(0, t) = a_1\mu(t) + a_2\nu(t), \quad w(l, t) = (a_1l + b_1)\mu(t) + (a_2l + b_2)\nu(t).$$

Из первого краевого условия

$$\mu(t) = a_1\mu(t) + a_2\nu(t)$$

получаем:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0.$$

А из второго краевого условия с учётом найденных $a_{1,2}$

$$\nu(t) = (a_1l + b_1)\mu(t) + (a_2l + b_2)\nu(t) = (l + b_1)\mu(t) + b_2\nu(t)$$

находим:

$$b_1 = -l, \quad b_2 = 1.$$

Наконец,

$$w(x, t) = (x - l)\mu(t) + \nu(t).$$

Для построенной таким образом функции $w(x, t)$ имеем:

$$w_t = (x - l)\mu'(t) + \nu'(t), \quad w_{tt} = (x - l)\mu''(t) + \nu''(t),$$

$$w_{xx} \equiv 0, \quad w(x, 0) = (x - l)\mu(0) + \nu(0).$$

Поэтому $w(x, t)$ удовлетворяет равенствам:

$$w_{tt} - w_{xx} = (x - l)\mu''(t) + \nu''(t), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (9.22)$$

$$w_x(0, t) = \mu(t), \quad w(l, t) = \nu(t), \quad t > 0, \quad (9.23)$$

$$w(x, 0) = (x - l)\mu(0) + \nu(0), \quad x \in [0, l], \quad (9.24)$$

$$w_t(x, 0) = (x - l)\mu'(0) + \nu'(0), \quad x \in [0, l]. \quad (9.25)$$

Шаг № 2. Сведение к задаче с однородными краевыми условиями.

Для функции $v(x, t) = u(x, t) - w(x, t)$, вычитая из (9.18) – (9.21) равенства (9.22) – (9.25), получим задачу

$$v_{tt} - v_{xx} = -(x - l)\mu''(t) - \nu''(t), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (9.26)$$

$$v_x(0, t) = v(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (9.27)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x) - ((x - l)\mu(0) + \nu(0)), \quad x \in [0, l], \quad (9.28)$$

$$v_t(x, 0) = -((x - l)\mu'(0) + \nu'(0)), \quad x \in [0, l]. \quad (9.29)$$

№ 655. Найти решение $u(x, t)$ задачи

$$u_{tt} - a^2u_{xx} = f(x), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (9.30)$$

$$u_x(0, t) = \alpha, \quad u_x(l, t) = \beta, \quad t > 0, \quad (9.31)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad (9.32)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, l]. \quad (9.33)$$

Шаг № 1. Сведём эту задачу к задаче с однородными краевыми условиями. Найдём $w(x, t) = (a_1x^2 + b_1x)\alpha + (a_2x^2 + b_2x)\beta$, чтобы она удовлетворяла краевым условиям

$$w_x(0, t) = \alpha, \quad w_x(l, t) = \beta.$$

Вид искомой функции $w(x, t)$ даёт на концах отрезка

$$w_x(0, t) = b_1\alpha + b_2\beta, \quad w_x(l, t) = (2a_1l + b_1)\alpha + (2a_2l + b_2)\beta.$$

Из первого краевого условия

$$\alpha = b_1\alpha + b_2\beta$$

получаем:

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 0.$$

А из второго краевого условия с учётом найденных $b_{1,2}$

$$\beta = (2a_1l + b_1)\alpha + (2a_2l + b_2)\beta = (2a_1l + 1)\alpha + 2a_2l\beta$$

находим:

$$a_1 = -\frac{1}{2l}, \quad a_2 = \frac{1}{2l}.$$

Наконец,

$$w(x, t) = \left(x - \frac{x^2}{2l}\right)\alpha + \frac{x^2}{2l}\beta = \alpha x + \frac{\beta - \alpha}{2l}x^2.$$

Для построенной таким образом функции $w(x, t)$ имеем:

$$w_t = w_{tt} \equiv 0, \quad w_{xx} = \frac{\beta - \alpha}{l}, \quad w(x, 0) = \alpha x + \frac{\beta - \alpha}{2l}x^2.$$

Поэтому $w(x, t)$ удовлетворяет равенствам:

$$w_{tt} - a^2w_{xx} = a^2\frac{\alpha - \beta}{l}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (9.34)$$

$$w_x(0, t) = \alpha, \quad w_x(l, t) = \beta, \quad t > 0, \quad (9.35)$$

$$w(x, 0) = \alpha x + \frac{\beta - \alpha}{2l}x^2, \quad x \in [0, l], \quad (9.36)$$

$$w_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l]. \quad (9.37)$$

Поэтому для функции $v(x, t) = u(x, t) - w(x, t)$, вычитая из (9.30) – (9.33) равенства (9.34) – (9.37), получим задачу

$$v_{tt} - a^2v_{xx} = f(x, t) - a^2\frac{\alpha - \beta}{l} = f_1(x), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (9.38)$$

$$v_x(0, t) = v_x(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (9.39)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x) - \left(\alpha x + \frac{\beta - \alpha}{2l}x^2\right) = \varphi_1(x), \quad x \in [0, l], \quad (9.40)$$

$$v_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, l]. \quad (9.41)$$

Шаг № 2. Решаем задачу с однородными краевыми условиями (9.38) – (9.41). Эта задача – частный случай решённой ранее задачи № 669^{M2}. Её решение:

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos \left(\frac{\pi n x}{l} \right), \quad (9.42)$$

где

$$T_0(t) = \frac{\varphi_0}{2} + \int_0^t \left(\frac{\psi_0}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} f_0(\chi) d\chi \right) d\tau. \quad (9.43)$$

$$\begin{aligned} T_n(t) = & \varphi_{1n} \sin \frac{\pi n a t}{l} + \psi_n \frac{l}{\pi n a} \cos \frac{\pi n a t}{l} + \\ & + \frac{l}{\pi n a} \left(\sin \frac{\pi n a t}{l} \int_0^t f_{1n}(\tau) \cos \frac{\pi n a \tau}{l} d\tau - \cos \frac{\pi n a t}{l} \int_0^t f_{1n}(\tau) \sin \frac{\pi n a \tau}{l} d\tau \right). \end{aligned} \quad (9.44)$$

При этом в нашем случае $f_1(x, t) = f_1(x) \Rightarrow f_{1n}(t) = f_{1n}$,

$$\varphi_{1n} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_1(x) \cos \left(\frac{\pi n x}{l} \right) dx, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \cos \left(\frac{\pi n x}{l} \right) dx,$$

$$f_{1n} = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) \cos \left(\frac{\pi n x}{l} \right) dx.$$

Наконец, поскольку f_{1n} не зависят от времени, их в (9.44) можно вынести за знаки интегралов:

$$\begin{aligned} \int_0^t f_{1n}(\tau) \cos \frac{\pi n a \tau}{l} d\tau &= f_{1n} \int_0^t \cos \frac{\pi n a \tau}{l} d\tau = f_{1n} \frac{l}{\pi n a} \sin \frac{\pi n a t}{l}, \\ \int_0^t f_{1n}(\tau) \sin \frac{\pi n a \tau}{l} d\tau &= f_{1n} \int_0^t \sin \frac{\pi n a \tau}{l} d\tau = -f_{1n} \frac{l}{\pi n a} \left(\cos \frac{\pi n a t}{l} - 1 \right). \end{aligned}$$

Кроме того, T_0 в силу (9.45) и независимости f_{10} от t имеет вид:

$$T_0(t) = \frac{\varphi_{10}}{2} + \int_0^t \left(\frac{\psi_0}{2} + \frac{f_{10}}{2} \int_0^{\tau} d\chi \right) d\tau = \frac{\varphi_{10}}{2} + \frac{\psi_0}{2} t + \frac{f_{10}}{2} \frac{t^2}{2}. \quad (9.45)$$

Подставляя всё это в (9.42), получим:

$$v(x, t) = \frac{\varphi_{10}}{2} + \frac{\psi_0}{2} t + \frac{f_{10}}{4} t^2 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_{1n} \sin \frac{\pi nat}{l} + \psi_n \frac{l}{\pi na} \cos \frac{\pi nat}{l} \right) \cos \left(\frac{\pi nx}{l} \right) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{1n}}{(\pi na)^2} \left(\sin^2 \frac{\pi nat}{l} + \cos^2 \frac{\pi nat}{l} - \cos \frac{\pi nat}{l} \right) \cos \left(\frac{\pi nx}{l} \right).$$

или, короче:

$$v(x, t) = \frac{\varphi_{10}}{2} + \frac{\psi_0}{2} t + \frac{f_{10}}{4} t^2 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_{1n} \sin \frac{\pi nat}{l} + \psi_n \frac{l}{\pi na} \cos \frac{\pi nat}{l} - \frac{f_{1n}}{(\pi na)^2} \cos \frac{\pi nat}{l} \right) \cos \left(\frac{\pi nx}{l} \right). \quad (9.46)$$

Ответ: $u(x, t) = \alpha x + \frac{\beta - \alpha}{2l} x^2 + v(x, t)$, где $v(x, t)$ задана в (9.46).

10. Метод Фурье в прямоугольнике

10.1. Примеры решения задач

№ 713. Найти функцию $u(x, y; t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y; t), & (x, y) \in \Pi, \quad t > 0; \\ u(x, y; 0) = 0, & (x, y) \in \Pi; \\ u(0, y; t) = u_x(p, y; t) = 0, & 0 < y < s, \quad 0 < t < T, \\ u(x, 0; t) = u(x, s; t) = 0, & 0 < x < p, \quad 0 < t < T, \end{cases} \quad (10.1)$$

где через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi = \{(x, y) : 0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq y \leq s\}.$$

Шаг 1. Предварительные рассуждения.

Если искать решение задачи (10.1) в виде двойного ряда

$$u(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_k(x) Y_n(y) T_{kn}(t), \quad (10.2)$$

то, подставив этот ряд и ряд

$$f(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_k(x) Y_n(y) f_{kn}(t) \quad (10.3)$$

в уравнение $u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$X_k(x) Y_n(y) T'_{kn}(t) = a^2 \cdot (X''_k(x) Y_n(y) + X_k(x) Y''_n(y)) T_{kn}(t) + X_k(x) Y_n(y) f_{kn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2 \cdot X_k(x)Y_n(y)T_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{T'_{kn}(t)}{a^2 T_{kn}(t)} = \frac{X''_k(x)}{X_k(x)} + \frac{Y''_n(y)}{Y_n(y)} + \frac{f_{kn}(t)}{a^2 T_{kn}(t)}$$

или

$$\frac{T'_{kn}(t) - f_{kn}(t)}{a^2 T_{kn}(t)} = \frac{X''_k(x)}{X_k(x)} + \frac{Y''_n(y)}{Y_n(y)}. \quad (10.4)$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t , а справа – от (x, y) , то это возможно, только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists \lambda_{kn}$ такая, что

$$T'_{kn}(t) + a^2 \lambda_{kn} T_{kn}(t) = f_{kn}(t), \quad \frac{X''_k(x)}{X_k(x)} + \frac{Y''_n(y)}{Y_n(y)} = -\lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x , а вторая – только от y , может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists \mu_k$ и ν_n такие, что

$$X''_k(x) + \mu_k X_k(x) = 0, \quad Y''_n(y) + \nu_n Y_n(y) = 0, \quad \mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}. \quad (10.5)$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (10.1) с решения двух задач Штурма–Лиувилля – для $X_k(x)$ и для $Y_n(y)$.

Шаг 2. Решение двух задач Штурма–Лиувилля
Краевые условия дают для функций $X_k(x)$ и $Y_n(y)$ выполнение равенств:

$$X(0) = X'(p) = 0, \quad Y(0) = Y(s) = 0. \quad (10.6)$$

Таким образом, функции $X_k(x)$ и $Y_n(y)$ есть решения задач Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} X''_k(x) + \mu_k X_k(x) = 0, \\ X_k(0) = X'_k(p) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} Y''_n(y) + \nu_n Y_n(y) = 0, \\ Y_n(0) = Y_n(s) = 0. \end{cases} \quad (10.7)$$

Общее решение уравнения $X''(x) + \mu X(x) = 0$ имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\mu} x) + c_2 \cos(\sqrt{\mu} x) \quad \text{при } \mu > 0; \quad (10.8)$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\mu} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\mu} x} \quad \text{при } \mu < 0; \quad (10.9)$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \quad \text{при } \mu = 0. \quad (10.10)$$

- При $\mu > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\mu} x) \Rightarrow X'(x) = c_1 \sqrt{\mu} \cos(\sqrt{\mu} x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(p) = 0$ получаем, что $\sqrt{\mu} p = \pi \left(-\frac{1}{2} + k\right)$, откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\mu_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2p} \right)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (10.11)$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_k(x) = \sin \left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p} \right), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (10.12)$$

- При $\mu < 0$ задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений.
- При $\mu = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow X(x) = (x) = c_1 x \Rightarrow X'(x) = c_1$. Поэтому из второго краевого условия $X'(p) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2p} \right)^2, \quad X_k(x) = \sin \left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

задачи

$$\begin{cases} X_k''(x) + \mu_k X_k(x) = 0, \\ X_k(0) = X_k'(p) = 0. \end{cases}$$

Задачи, подобные задаче для $Y_n(y)$, рассматривались уже не раз (№ 687, № 705). Поэтому запишем результат:

существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\nu_n = \frac{\pi^2 n^2}{s^2}, \quad Y_n(y) = \sin \left(\frac{\pi n y}{s} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций T_{kn} имеем уравнение:

$$\begin{aligned} T_{kn}'(t) + a^2 \lambda_{kn} T_{kn}(t) &= f_{kn}(t), & t > 0, \\ \lambda_{kn} &= \frac{\pi^2(2k-1)^2}{(2p)^2} + \frac{\pi^2 n^2}{s^2}. \end{aligned}$$

А поскольку начальное условие $u(x, y; 0) = 0$ будет заведомо выполнено, если $T_{kn}(0) = 0$, то для функций $T_{kn}(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} T_{kn}'(t) + a^2 \lambda_{kn} T_{kn}(t) = f_{kn}(t), & t > 0, & \lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{(2p)^2} + \frac{\pi^2 n^2}{s^2}; \\ T_{kn}(0) = 0. \end{cases} \quad (10.13)$$

Шаг 3. Решаем задачу (10.13).

Решение этого линейного неоднородного уравнения первого порядка получим методом вариации постоянной.

Сначала решим соответствующее однородное уравнение:

$$T_o'(t) + a^2 \lambda_{kn} T_o(t) = 0.$$

Его решение имеет вид:

$$T_o(t) = c e^{-a^2 \lambda_{kn} t} \quad t > 0,$$

где c – произвольная постоянная.

Далее будем искать общее решение неоднородного уравнения

$$T_{kn}'(t) + a^2 \lambda_{kn} T_{kn}(t) = f_{kn}(t)$$

в виде

$$T_{kn}(t) = c(t)e^{-a^2\lambda_{kn}t}, \quad t > 0. \quad (10.14)$$

Подставив (10.14) в уравнение, получим, что неизвестная функция $c(t)$ должна удовлетворять требованию

$$c'(t)e^{-a^2\lambda_{kn}t} = f_{kn}(t),$$

откуда

$$c(t) = T_{kn}(0) + \int_0^t f_{kn}(\tau)e^{a^2\lambda_{kn}\tau} d\tau.$$

Итак, наконец, решение задачи Коши (10.13) задаётся формулой:

$$T_{kn}(t) = \int_0^t f_{kn}(\tau)e^{-a^2\lambda_{kn}(t-\tau)} d\tau, \quad t > 0. \quad (10.15)$$

Нам ещё надо найти, по какой формуле вычислять коэффициенты $f_{kn}(t)$ разложения функции $f(x, y; t)$ по собственным функциям задач Штурма–Лиувилля. Получим эту формулу. Для этого, как обычно, домножим (10.3) на $\sin\left(\frac{\pi(2l-1)x}{2p}\right)\sin\left(\frac{\pi my}{s}\right)$ и проинтегрируем по Π . Учитывая ортогональность собственных функций задач Штурма–Лиувилля, получим:

$$\begin{aligned} (f, X_l \cdot Y_m) &= f_{lm}(t) \int_0^p \sin^2\left(\frac{\pi(2l-1)x}{2p}\right) dx \int_0^s \sin^2\left(\frac{\pi my}{s}\right) dy = \\ &= \frac{f_{lm}(t)}{4} \int_0^p \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(2l-1)x}{p}\right)\right) dx \int_0^s \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi my}{s}\right)\right) dy = f_{lm}(t) \cdot \frac{ps}{4}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$f_{kn}(t) = \frac{4}{ps} \int_0^p \int_0^s f(x, y; t) \sin\left(\frac{\pi(2l-1)x}{2p}\right) \sin\left(\frac{\pi my}{s}\right) dy.$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (10.2) функции $X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right)$, $Y_n(y) = \sin\left(\frac{\pi ny}{s}\right)$ и только что найденные функции $T_{kn}(t)$ из (10.15).

Ответ:

$$u(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right) \sin\left(\frac{\pi ny}{s}\right) \left(\int_0^t f_{kn}(\tau)e^{-a^2\lambda_{kn}(t-\tau)} d\tau \right),$$

где $\lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{(2p)^2} + \frac{\pi^2 n^2}{s^2}$, а $f_{kn}(t)$ находятся по формуле

$$f_{kn}(t) = \frac{4}{ps} \int_0^p \int_0^s f(x, y; t) \sin\left(\frac{\pi(2l-1)x}{2p}\right) \sin\left(\frac{\pi my}{s}\right) dy.$$

№ 714. Найти функцию $u(x, y; t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + A \sin\left(\frac{3\pi x}{2p}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right), & (x, y) \in \Pi, \quad t > 0; \\ u(x, y; 0) = B \sin\left(\frac{\pi x}{2p}\right) \cos\left(\frac{3\pi y}{2s}\right), & (x, y) \in \Pi; \\ u(0, y; t) = u_x(p, y; t) = 0, & 0 < y < s, \quad 0 < t < T, \\ u_y(x, 0; t) = u(x, s; t) = 0, & 0 < x < p, \quad 0 < t < T, \end{cases} \quad (10.16)$$

где через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi = \{(x, y) : 0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq y \leq s\}.$$

Шаг 1. Предварительные рассуждения.

Если искать решение задачи (10.16) в виде двойного ряда

$$u(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_k(x) Y_n(y) T_{kn}(t), \quad (10.17)$$

то, подставив этот ряд и ряд

$$f(x, y; t) \equiv A \sin\left(\frac{3\pi x}{2p}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_k(x) Y_n(y) f_{kn} \quad (10.18)$$

в уравнение $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$X_k(x) Y_n(y) T'_{kn}(t) = a^2 \cdot (X_k''(x) Y_n(y) + X_k(x) Y_n''(y)) T_{kn}(t) + X_k(x) Y_n(y) f_{kn}.$$

Поделив это равенство на $a^2 \cdot X_k(x) Y_n(y) T_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{T'_{kn}(t)}{a^2 T_{kn}(t)} = \frac{X_k''(x)}{X_k(x)} + \frac{Y_n''(y)}{Y_n(y)} + \frac{f_{kn}}{a^2 T_{kn}(t)}$$

или

$$\frac{T'_{kn}(t) - f_{kn}}{a^2 T_{kn}(t)} = \frac{X_k''(x)}{X_k(x)} + \frac{Y_n''(y)}{Y_n(y)}. \quad (10.19)$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t , а справа – от (x, y) , то это возможно, только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists \lambda_{kn}$ такая, что

$$T'_{kn}(t) + a^2 \lambda_{kn} T_{kn}(t) = f_{kn}, \quad \frac{X_k''(x)}{X_k(x)} + \frac{Y_n''(y)}{Y_n(y)} = -\lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x , а вторая – только от y , может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists \mu_k$ и ν_n такие, что

$$X_k''(x) + \mu_k X_k(x) = 0, \quad Y_n''(y) + \nu_n Y_n(y) = 0, \quad \mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}. \quad (10.20)$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (10.16) с решения двух задач Штурма–Лиувилля – для $X_k(x)$ и для $Y_n(y)$.

Шаг 2. Решение двух задач Штурма–Лиувилля. Краевые условия дают для функций $X_k(x)$ и $Y_n(y)$ выполнение равенств:

$$X(0) = X'(p) = 0, \quad Y'(0) = Y(s) = 0. \quad (10.21)$$

Таким образом, функции $X_k(x)$ и $Y_n(y)$ есть решения задач Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} X_k''(x) + \mu_k X_k(x) = 0, \\ X_k(0) = X_k'(p) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} Y_n''(y) + \nu_n Y_n(y) = 0, \\ Y_n'(0) = Y_n(s) = 0. \end{cases} \quad (10.22)$$

Задачу для $X_k(x)$ мы уже решили в № 713, стр. 106. Выпишем результат: *существует бесконечное множество нетривиальных решений*

$$\mu_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2p} \right)^2, \quad X_k(x) = \sin \left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p} \right), \quad k \in \mathbb{N}$$

первой задачи из (10.22).

Задача для $Y_n(y)$ решается аналогично. У неё также существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\nu_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2s} \right)^2, \quad Y_n(y) = \cos \left(\frac{\pi(2n-1)y}{2s} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций T_{kn} имеем уравнение:

$$T_{kn}'(t) + a^2 \lambda_{kn} T_{kn}(t) = f_{kn}, \quad t > 0, \quad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{(2p)^2} + \frac{\pi^2(2n-1)^2}{(2s)^2}. \quad (10.23)$$

Найдём разложение функций $\varphi(x, y)$ и $f(x, y; t)$ в ряд

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_k(x) Y_n(y) \varphi_{kn}. \quad (10.24)$$

$$f(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_k(x) Y_n(y) f_{kn}(t). \quad (10.25)$$

Существенный момент: в данном случае коэффициенты разложения φ_{kn} и f_{kn} найти гораздо проще, чем обычно, поскольку функции $\varphi(x, y)$ и $f(x, y; t)$ имеют в точности вид ОДНОГО из слагаемых соответствующего ряда. А именно:

$$\varphi(x, y) \equiv B X_1(x) Y_2(y) = B \sin \left(\frac{\pi x}{2p} \right) \cos \left(\frac{3\pi y}{2s} \right), \quad (10.26)$$

$$f(x, y; t) \equiv AX_2(x)Y_1(y) = A \sin\left(\frac{3\pi x}{2p}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right). \quad (10.27)$$

Поэтому

$$\varphi_{kn} = \begin{cases} B, & k=1, \ n=2; \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad f_{kn} = \begin{cases} A, & k=2, \ n=1; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (10.28)$$

Поскольку начальное условие

$$u(x, y; 0) = \varphi(x, y)$$

будет заведомо выполнено, если $T_{kn}(0) = \varphi_{kn}$, то для функций $T_{kn}(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} T'_{kn}(t) + a^2 \lambda_{kn} T_{kn}(t) = f_{kn}, & t > 0; \\ T_{kn}(0) = \varphi_{kn}, \end{cases} \quad \lambda_{kn} = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}\right)^2 + \left(\frac{\pi(2n-1)}{2s}\right)^2.$$

Шаг 3. Решаем задачу Коши для T_{kn} .

Можно решить эту задачу Коши методом вариации постоянной, как в № 713 (стр.107). Но в данном случае правые части есть константы, и частное решение неоднородного уравнения легко угадывается:

$$T_{\text{чно}} = \frac{f_{kn}}{a^2 \lambda_{kn}}.$$

Поэтому общее решение неоднородного уравнения

$$T'_{kn}(t) + a^2 \lambda_{kn} T_{kn}(t) = f_{kn}$$

имеет вид

$$T_{kn}(t) = T_{\text{чно}} + T_{\text{оо}} = \frac{f_{kn}}{a^2 \lambda_{kn}} + ce^{-a^2 \lambda_{kn} t}. \quad (10.29)$$

Подставив в (10.29) условие Коши $T_{kn}(0) = \varphi_{kn}$, получим, что $c = \varphi_{kn} - \frac{f_{kn}}{a^2 \lambda_{kn}}$ и

$$T_{kn}(t) = \frac{f_{kn}}{a^2 \lambda_{kn}} \cdot (1 - e^{-a^2 \lambda_{kn} t}) + \varphi_{kn} e^{-a^2 \lambda_{kn} t}, \quad t > 0. \quad (10.30)$$

Теперь осталось выписать в явном виде все $T_{kn}(t)$ во всех случаях.

$$T_{kn}(t) = \begin{cases} Be^{-a^2 \lambda_{12} t}, & k=1, \ n=2; \\ \frac{A}{a^2 \lambda_{21}} \cdot (1 - e^{-a^2 \lambda_{21} t}), & k=2, \ n=1; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad t > 0. \quad (10.31)$$

Шаг 4. Подготовка к ответу.

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (10.17) функции

$X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right)$, $Y_n(y) = \cos\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2s}\right)$ и учесть, что только что найденные функции $T_{kn}(t)$ из (10.31) равны нулю при всех k и n , кроме случаев $k = 1$, $n = 2$ и $k = 2$, $n = 1$. Поэтому двойной ряд

$$u(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_k(x) Y_n(y) T_{kn}(t)$$

превратится в сумму всего двух слагаемых:

$$u(x, y; t) = X_1(x) Y_2(y) T_{12}(t) + X_2(x) Y_1(y) T_{21}(t),$$

то есть

$$u(x, y; t) = B \sin\left(\frac{\pi x}{2p}\right) \cos\left(\frac{3\pi y}{2s}\right) \cdot e^{-a^2 \lambda_{12} t} + \\ + \frac{A}{a^2 \lambda_{21}} \sin\left(\frac{3\pi x}{2p}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right) \cdot \left(1 - e^{-a^2 \lambda_{21} t}\right). \quad (10.32)$$

Наконец, с учётом, что $\lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{(2p)^2} + \frac{\pi^2(2n-1)^2}{(2s)^2}$, получаем

$$\lambda_{12} = \frac{\pi^2}{4p^2} + \frac{9\pi^2}{4s^2} = \frac{\pi^2(s^2 + 9p^2)}{4p^2 s^2}, \quad \lambda_{21} = \frac{9\pi^2}{4p^2} + \frac{\pi^2}{4s^2} = \frac{\pi^2(9s^2 + p^2)}{4p^2 s^2}. \quad (10.33)$$

Ответ: $u(x, y; t)$ определяется (10.32), где λ_{12} , λ_{21} заданы в (10.33).

№ 715. Найти функцию $u(x, y; t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + A \sin\left(\frac{\pi x}{p}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2s}\right), & (x, y) \in \Pi, \quad t > 0; \\ u(x, y; 0) = 0, & (x, y) \in \Pi; \\ u(0, y; t) = u(p, y; t) = 0, & 0 < y < s, \quad 0 < t < T, \\ u(x, 0; t) = u_y(x, s; t) = 0, & 0 < x < p, \quad 0 < t < T, \end{cases} \quad (10.34)$$

где через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi = \{(x, y) : 0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq y \leq s\}.$$

Шаг 1. Предварительные рассуждения.

Если искать решение задачи (10.34) в виде двойного ряда

$$u(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_k(x) Y_n(y) T_{kn}(t), \quad (10.35)$$

то, подставив этот ряд и ряд

$$f(x, y; t) \equiv A \sin\left(\frac{\pi x}{p}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_k(x) Y_n(y) f_{kn} \quad (10.36)$$

в уравнение $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$X_k(x)Y_n(y)T'_{kn}(t) = a^2 \cdot (X''_k(x)Y_n(y) + X_k(x)Y''_n(y))T_{kn}(t) + X_k(x)Y_n(y)f_{kn}.$$

Поделив это равенство на $a^2 \cdot X_k(x)Y_n(y)T_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{T'_{kn}(t)}{a^2 T_{kn}(t)} = \frac{X''_k(x)}{X_k(x)} + \frac{Y''_n(y)}{Y_n(y)} + \frac{f_{kn}}{a^2 T_{kn}(t)}$$

или

$$\frac{T'_{kn}(t) - f_{kn}}{a^2 T_{kn}(t)} = \frac{X''_k(x)}{X_k(x)} + \frac{Y''_n(y)}{Y_n(y)}. \quad (10.37)$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t , а справа – от (x, y) , то это возможно, только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists \lambda_{kn}$ такая, что

$$T'_{kn}(t) + a^2 \lambda_{kn} T_{kn}(t) = f_{kn}, \quad \frac{X''_k(x)}{X_k(x)} + \frac{Y''_n(y)}{Y_n(y)} = -\lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x , а вторая – только от y , может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists \mu_k$ и ν_n такие, что

$$X''_k(x) + \mu_k X_k(x) = 0, \quad Y''_n(y) + \nu_n Y_n(y) = 0, \quad \mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}. \quad (10.38)$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (10.34) с решения двух задач Штурма–Лиувилля – для $X_k(x)$ и для $Y_n(y)$.

Шаг 2. Решение двух задач Штурма–Лиувилля
Крайевые условия дают для функций $X_k(x)$ и $Y_n(y)$ выполнение равенств:

$$X(0) = X(p) = 0, \quad Y(0) = Y'(s) = 0. \quad (10.39)$$

Таким образом, функции $X_k(x)$ и $Y_n(y)$ есть решения задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} X''_k(x) + \mu_k X_k(x) = 0, \\ X_k(0) = X_k(p) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} Y''_n(y) + \nu_n Y_n(y) = 0, \\ Y_n(0) = Y'_n(s) = 0, \end{cases} \quad (10.40)$$

Обе задачи мы уже решали (см. стр. 106). Выпишем результат:
существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \left(\frac{\pi k}{p}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k x}{p}\right), \quad k \in \mathbb{N},$$

первой задачи из (10.40) и существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\nu_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2s}\right)^2, \quad Y_n(y) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2s}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

второй задачи из (10.40).

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$ для функций T_{kn} имеем уравнение:

$$T'_{kn}(t) + a^2 \lambda_{kn} T_{kn}(t) = f_{kn}, \quad t > 0, \quad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2 k^2}{p^2} + \frac{\pi^2 (2n-1)^2}{4s^2}. \quad (10.41)$$

В данном случае функция $\varphi(x, y) \equiv 0$ начального условия разлагается в тривиальный ряд

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_k(x) Y_n(y) \varphi_{kn}, \quad \varphi_{kn} = 0 \quad \forall k, n \in \mathbb{N}. \quad (10.42)$$

Коэффициенты разложения f_{kn} в ряд в данном случае ищутся так же, как в № 714, поскольку функция $f(x, y; t)$ имеет в точности вид ОДНОГО из слагаемых соответствующего ряда. А именно:

$$f(x, y; t) \equiv A X_1(x) Y_1(y) = A \sin\left(\frac{\pi x}{p}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2s}\right). \quad (10.43)$$

Поэтому

$$f_{kn} = \begin{cases} A, & k = n = 1; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (10.44)$$

Поскольку начальное условие

$$u(x, y; 0) = \varphi(x, y) \equiv 0$$

будет заведомо выполнено, если $T_{kn}(0) = \varphi_{kn} = 0$, то для функций $T_{kn}(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} T'_{kn}(t) + a^2 \lambda_{kn} T_{kn}(t) = f_{kn}, & t > 0; \\ T_{kn}(0) = 0. \end{cases} \quad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2 k^2}{p^2} + \frac{\pi^2 (2n-1)^2}{4s^2}. \quad (10.45)$$

Шаг 3. Решаем задачу (10.45).

Можно решить эту задачу Коши методом вариации постоянной, как в № 713 (стр.107). Но в данном случае правые части есть константы, и частное решение неоднородного уравнения легко угадывается:

$$T_{\text{чно}} = \frac{f_{kn}}{a^2 \lambda_{kn}}.$$

Поэтому общее решение неоднородного уравнения

$$T'_{kn}(t) + a^2 \lambda_{kn} T_{kn}(t) = f_{kn}$$

имеет вид

$$T_{kn}(t) = T_{\text{чно}} + T_{00} = \frac{f_{kn}}{a^2 \lambda_{kn}} + c e^{-a^2 \lambda_{kn} t}. \quad (10.46)$$

Подставив в (10.46) условие Коши $T_{kn}(0) = 0$, получим, что $c = -\frac{f_{kn}}{a^2 \lambda_{kn}}$ и

$$T_{kn}(t) = \frac{f_{kn}}{a^2 \lambda_{kn}} \cdot \left(1 - e^{-a^2 \lambda_{kn} t}\right), \quad t > 0. \quad (10.47)$$

Теперь осталось выписать в явном виде все $T_{kn}(t)$ во всех случаях.

$$T_{kn}(t) = \begin{cases} \frac{A}{a^2 \lambda_{11}} \cdot \left(1 - e^{-a^2 \lambda_{11} t}\right), & k = 1, \quad n = 1; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad t > 0. \quad (10.48)$$

Шаг 4. Подготовка к ответу.

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (10.35) функции $X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k x}{p}\right)$, $Y_n(y) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2s}\right)$ и учесть, что только что найденные функции $T_{kn}(t)$ из (10.48) равны нулю при всех k и n , кроме случая $k = n = 1$. Поэтому двойной ряд

$$u(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_k(x) Y_n(y) T_{kn}(t)$$

превратится в одно единственное слагаемое:

$$u(x, y; t) = X_1(x) Y_1(y) T_{11}(t),$$

то есть

$$u(x, y; t) = \frac{A}{a^2 \lambda_{11}} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{p}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2s}\right) \cdot \left(1 - e^{-a^2 \lambda_{11} t}\right).$$

Наконец, с учётом, что $\lambda_{kn} = \frac{\pi^2 k^2}{p^2} + \frac{\pi^2 (2n-1)^2}{4s^2}$, получаем

$$\lambda_{11} = \frac{\pi^2}{p^2} + \frac{\pi^2}{4s^2} = \frac{\pi^2 (4s^2 + p^2)}{4p^2 s^2}.$$

Ответ:

$$u(x, y; t) = \frac{4Ap^2 s^2}{a^2 \pi^2 (4s^2 + p^2)} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{p}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2s}\right) \cdot \left(1 - e^{-a^2 \lambda_{11} t}\right).$$

11. Уравнение Лапласа в круге и вне круга

11.1. Уравнение Лапласа в полярных координатах

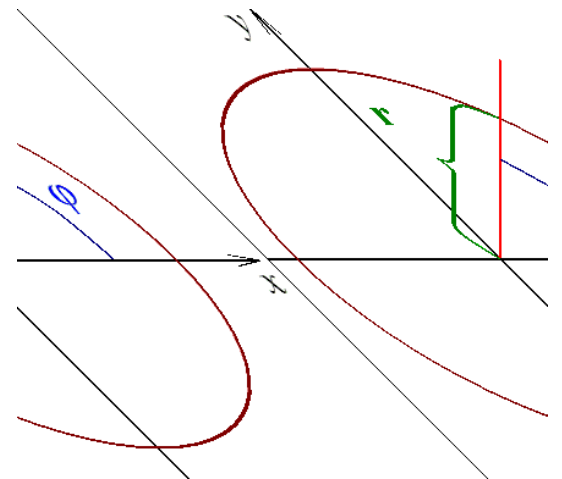
Рассмотрим в полярных координатах

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (11.1)$$

уравнение Лапласа $\Delta u = 0$. Поскольку в полярных координатах

$$\Delta u = \frac{1}{r} (ru_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi},$$

то уравнение Лапласа принимает вид:



$$\Delta u \equiv \frac{1}{r} (ru_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0. \quad (11.2)$$

Будем искать решение (11.2) методом разделения переменных.

Шаг 1. Поиск круговых гармоник.

Пусть функция

$$U(r, \varphi) = X(r)\Phi(\varphi)$$

есть решение уравнения (11.2). Тогда

$$\frac{1}{r} (rX'(r))' \Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2} \Phi''(\varphi) X(r) = 0.$$

Поделим это равенство на $X(r)\Phi(\varphi)$ и умножим на r^2 :

$$\frac{r(rX'(r))'}{X(r)} = - \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от r , а справа – функция, зависящая только от φ , то равны они друг другу могут быть только в случае, когда они – константы. Точнее, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{(rX'(r))'}{X(r)} = - \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda.$$

Отсюда для $X(r)$ получаем уравнение

$$r^2 X''(r) + rX'(r) - \lambda X(r) = 0, \quad (11.3)$$

а для функций Φ – уравнение

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0. \quad (11.4)$$

Непрерывные функции на плоскости должны периодически зависеть от полярного угла φ . Поэтому дополним уравнение (11.4) условием 2π -периодичности:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \end{cases} \quad (11.5)$$

Решим эту задачу. Общим решением уравнения $\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0$ является функция

$$\begin{cases} \Phi(\varphi) = c_1 \operatorname{sh}(\beta\varphi) + c_2 \operatorname{ch}(\beta\varphi) & \text{при } \lambda = -\beta^2 < 0; \\ \Phi(\varphi) = c_1 + c_2\varphi & \text{при } \lambda = 0; \\ \Phi(\varphi) = c_1 \sin(\beta\varphi) + c_2 \cos(\beta\varphi) & \text{при } \lambda = \beta^2 > 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что функции $c_1 \operatorname{sh}(\beta\varphi) + c_2 \operatorname{ch}(\beta\varphi)$ ни при каких $c_{1,2}$ (кроме $c_1 = c_2 = 0$) не удовлетворяют условию периодичности $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. В свою очередь, функции $c_1 + c_2\varphi$ удовлетворяют условию периодичности только при $c_2 = 0$.

В то же время функция $c_1 \sin(\beta\varphi) + c_2 \cos(\beta\varphi)$ удовлетворяет этому условию тогда и только тогда, когда

$$\lambda = \beta^2 = k^2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Мы будем рассматривать только $k \geq 0$, так как отрицательные значения k не дают новых λ или $\Phi(\varphi)$. А разрешая числу k принимать значение $k = 0$, мы включаем функцию $\Phi(\varphi) = \text{const}$ (являющуюся нетривиальным решением при $\lambda = 0$) в общую формулу нетривиальных решений (11.6).

Итак, функция $\Phi(\varphi)$ есть решение (11.5) тогда и только тогда, когда

$$\Phi(\varphi) = c_1 \sin(k\varphi) + c_2 \cos(k\varphi), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.6)$$

Наконец, для функции $U(r, \varphi) = X(r)\Phi(\varphi)$ с учётом (11.6), получаем, что

функция

$$U(r, \varphi) = X(r)\Phi(\varphi)$$

есть решение уравнения Лапласа тогда и только тогда, когда функция $X(r)$ есть решение уравнения

$$r^2 X''(r) + rX'(r) - \lambda X(r) = 0, \quad (11.3)$$

при $\lambda = k^2$, $k = \overline{0, \infty}$, а функция $\Phi(\varphi)$ имеет вид

$$\Phi(\varphi) = \Phi_k(\varphi) = c_1 \sin(k\varphi) + c_2 \cos(k\varphi), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.7)$$

Шаг 2. Решение уравнения (11.3)

При $k = 0$. В данном случае уравнение легко решается:

$$r^2 X''(r) + rX'(r) \equiv r(rX')' = 0 \Rightarrow rX' = c_1 \Rightarrow X(r) = c_1 \ln r + c_2.$$

Заметим, что r под знаком логарифма без модуля, так как мы рассматриваем только $r \geq 0$.

Теперь **важно отметить**, что так как физически осмысленны только ограниченные решения уравнения, а функция $\ln r$ неограничена ни внутри круга, ни вне круга, то **нам следует рассматривать только случай** $c_1 = 0$. Кроме того, раз нас интересуют только линейно независимые решения (11.3), то мы можем выбрать $c_2 = 1$. Итак,

$$X_0(r) = 1. \quad (11.8)$$

При $k \in \mathbb{N}$. Данное уравнение есть уравнение Эйлера, поскольку степень множителей r при всех производных функции $X(r)$ равна порядку этих производных. Эти уравнения решаются при помощи замены

$$r = e^t, \quad X(r) = X(e^t) = y(t), \quad rX'(r) = y'(t), \quad r^2 X''(r) = y''(t) - y'(t).$$

Нам не надо рассматривать случай $r = -e^t < 0$, поскольку в нашей задаче $r \in (0, R)$. Для новой функции $y(t)$ при $\lambda = k^2$, $k = \overline{0, \infty}$ получаем уравнение

$$y''(t) - k^2 y(t) = 0, \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Его общее решение имеет вид

$$y(t) = Ae^{kt} + Be^{-kt}.$$

Отсюда, так как $e^t = r$, общее решение уравнения (11.3) имеет вид

$$X(r) = Ar^k + Br^{-k}.$$

Ну а поскольку нас интересуют только ограниченные решения, то когда уравнение решается

- в круге, содержащем начало координат, $B = 0$ и

$$X_k(r) = r^k, \quad k = \overline{0, \infty}, \quad (11.9)$$

- во внешности круга, содержащего начало координат, $A = 0$ и

$$X_k(r) = \frac{1}{r^k}, \quad k = \overline{0, \infty}. \quad (11.10)$$

Заметим, что, позволив k принимать значение 0 в равенствах (11.9), (11.10), мы добавили ко множеству линейно независимых решений ещё и решение $X_0(r) = 1$ из формулы (11.8).

Шаг 3. Общее решение уравнения Лапласа в круге.

Нам осталось составить из полученных функций X_k (из равенства (11.9)), а также $\Phi_k(\varphi)$, $k = \overline{0, \infty}$ ряд.

Ответ:

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(r) \Phi_k(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)). \quad (11.11)$$

Шаг 4. Общее решение уравнения Лапласа вне круга.

Составим из полученных функций X_k (из равенства (11.10)), а также $\Phi_k(\varphi)$, $k = \overline{0, \infty}$ ряд. Здесь вся разница от задачи внутри шара состоит в том, что функции $X_k(r)$ имеют вид (11.10), а не (11.9):

Ответ:

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(r) \Phi_k(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^k} (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)). \quad (11.12)$$

11.2. Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри круга.

Найти ограниченную функцию $u(r, \varphi)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r} (ru_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \varphi < 2\pi; \\ |u(0, \varphi)| < \infty, \\ u(R, \varphi) = f(\varphi). \end{cases} \quad (11.13)$$

Шаг 1. Решение уравнения Лапласа в круге.

Уравнения Лапласа в круге мы уже решили на страницах 116 – 118 и получили формулу

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(r) \Phi_k(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)). \quad (11.11)$$

Шаг 2. Использование краевого условия.
В нашей задаче добавилось краевое условие

$$u(R, \varphi) = f(\varphi).$$

Оно позволит нам найти коэффициенты A_k и B_k в формуле (11.11).

Поскольку функции $\{1, \cos(k\varphi), \sin(k\varphi), k \in \mathbb{N}\}$ образуют полную ортогональную систему функций, то функцию $f(\varphi)$ можно разложить в ряд по этой системе – фактически, в тригонометрический ряд Фурье – на промежутке $\varphi \in (0, 2\pi)$:

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)), \quad (11.14)$$

$$\alpha_k = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (11.15)$$

$$\beta_k = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (11.16)$$

При этом ряд (11.14) сходится к $f(\varphi)$ абсолютно и равномерно на $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Приравняем ряд (11.11), взятый при $r = R$, к ряду (11.14):

$$\begin{aligned} u(R, \varphi) &= \sum_{k=0}^{\infty} R^k (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) = \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)) = f(\varphi). \end{aligned}$$

Получаем при $k = 0$

$$A_0 \overbrace{\cos(0)}^{=1} + B_0 \overbrace{\sin(0)}^{=0} = \frac{\alpha_0}{2},$$

откуда

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad B_0 - \text{произвольно.} \quad (11.17)$$

Аналогично, при $k \in \mathbb{N}$

$$R^k (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) = \alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi),$$

откуда в силу линейной независимости функций $\sin(k\varphi)$ и $\cos(k\varphi)$

$$A_k = \frac{\alpha_k}{R^k}, \quad B_k = \frac{\beta_k}{R^k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (11.18)$$

Ответ:

$$u(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k (\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)), \quad (11.19)$$

где коэффициенты α_k и β_k определяются из формул

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (11.15)$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (11.16)$$

11.3. Примеры решения задач

№ 719. а) Построить функцию $u(r, \varphi)$, гармоническую в круге радиуса R , и удовлетворяющую краевому условию:

$$u(R, \varphi) = f(\varphi) = \varphi(2\pi - \varphi).$$

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти ограниченную функцию $u(r, \varphi)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r} (ru_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \varphi < 2\pi; \\ |u(0, \varphi)| < \infty, \\ u(R, \varphi) = f(\varphi) = \varphi(2\pi - \varphi). \end{cases} \quad (11.20)$$

Шаг 1. Решение в общем виде

Данная задача есть частный случай задачи, решённой нами на страницах 118 – 119. Воспользуемся результатом:

Общее решение внутренней задачи Дирихле:

$$u(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k (\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)), \quad (11.19)$$

где коэффициенты α_k и β_k определяются из формул

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (11.15)$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (11.16)$$

Найдём коэффициенты α_k , β_k . Так как

$$\int_0^{2\pi} \varphi \cos(k\varphi) d\varphi = \left. \frac{\varphi \sin(k\varphi)}{k} \right|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \sin(k\varphi) d\varphi = \left. \frac{1}{k^2} \cos(k\varphi) \right|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0; \quad (11.21)$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \varphi \sin(k\varphi) d\varphi &= \left. \frac{-\varphi \cos(k\varphi)}{k} \right|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \cos(k\varphi) d\varphi = \\ &= -\frac{2\pi}{k} + \frac{1}{k^2} \sin(k\varphi) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = -\frac{2\pi}{k}; \quad (11.22)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \varphi^2 \cos(k\varphi) d\varphi &= \left. \frac{\varphi^2 \sin(k\varphi)}{k} \right|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} - \frac{2}{k} \int_0^{2\pi} \varphi \sin(k\varphi) d\varphi = \\ &= \left[\text{в силу (11.22)} \right] = -\frac{2}{k} \cdot \left(-\frac{2\pi}{k} \right) = \frac{4\pi}{k^2}; \quad (11.23)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \varphi^2 \sin(k\varphi) d\varphi &= \left. \frac{-\varphi^2 \cos(k\varphi)}{k} \right|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} + \frac{2}{k} \int_0^{2\pi} \varphi \cos(k\varphi) d\varphi = \\ &= \left[\text{в силу (11.21)} \right] = -\frac{4\pi^2}{k} + \frac{2}{k} \cdot 0 = -\frac{4\pi^2}{k}, \quad (11.24)\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (2\pi\varphi - \varphi^2) \cos(k\varphi) d\varphi = \\ &= \left[\text{в силу (11.21) и (11.23)} \right] = \frac{1}{\pi} \cdot \left(2\pi \cdot 0 - \frac{4\pi}{k^2} \right) = -\frac{4}{k^2}, \quad (11.25)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (2\pi\varphi - \varphi^2) \sin(k\varphi) d\varphi = \\ &= \left[\text{в силу (11.22) и (11.24)} \right] = \frac{1}{\pi} \cdot \left(2\pi \cdot \left(-\frac{2\pi}{k} \right) - \left(-\frac{4\pi^2}{k} \right) \right) = 0. \quad (11.26)\end{aligned}$$

Как обычно, α_0 следует находить отдельно:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (2\pi\varphi - \varphi^2) d\varphi = \frac{4\pi^2}{3}. \quad (11.27)$$

Наконец, подставив (11.27), (11.25), (11.26) в (11.19), получаем:

Ответ:

$$u(r, \varphi) = \frac{2\pi^2}{3} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^k \frac{\cos(k\varphi)}{k^2}.$$

№ 719. б) Построить функцию $u(r, \varphi)$, гармоническую в круге радиуса R , и удовлетворяющую краевому условию:

$$u(R, \varphi) = f(\varphi) = \varphi \sin \varphi.$$

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти ограниченную функцию $u(r, \varphi)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \varphi < 2\pi; \\ |u(0, \varphi)| < \infty, \\ u(R, \varphi) = f(\varphi) = \varphi \sin \varphi. \end{cases} \quad (11.28)$$

Шаг 1. Решение в общем виде

Данная задача есть частный случай задачи, решённой нами на страницах 118 – 119. Воспользуемся результатом – формулами (11.19), (11.15) (11.16).

Найдём коэффициенты α_k, β_k . Так как (см. (11.21) и (11.22))

$$\int_0^{2\pi} \varphi \cos(k\varphi) d\varphi = 0; \quad \int_0^{2\pi} \varphi \sin(k\varphi) d\varphi = -\frac{2\pi}{k},$$

то

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \sin \varphi \cos(k\varphi) d\varphi = \\ &= \left[2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b) \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \left(\sin((k+1)\varphi) - \sin((k-1)\varphi) \right) d\varphi = \left[\text{в силу (11.22)} \right] = \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{2\pi}{k+1} - \frac{2\pi}{k-1} \right) = \frac{2}{k^2-1} & \text{при } k > 1; \\ -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{2} = -\frac{1}{2} & \text{при } k = 1. \end{cases} \quad (11.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \sin \varphi \sin(k\varphi) d\varphi = \\ &= \left[2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b) \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \left(\cos((k-1)\varphi) - \cos((k+1)\varphi) \right) d\varphi = \left[\text{в силу (11.21)} \right] = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \cdot (0 - 0) = 0 & \text{при } k > 1; \\ \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varphi^2}{2} \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4\pi^2}{2} = \pi & \text{при } k = 1. \end{cases} \quad (11.30)$$

Как обычно, α_0 следует находить отдельно:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \sin \varphi d\varphi = \left[\text{в силу (11.22)} \right] = -2. \quad (11.31)$$

Наконец, подставив (11.31), (11.29), (11.30) в (11.19), получаем:

Ответ:

$$u(r, \varphi) = -1 - \frac{r}{R} \left(\frac{1}{2} \cos \varphi - \pi \sin \varphi \right) + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^k \frac{\cos(k\varphi)}{k^2 + 1}.$$

№ 719^M. в) Построить функцию $u(r, \varphi)$, гармоническую в круге радиуса R , и удовлетворяющую краевому условию:

$$u(R, \varphi) = f(\varphi) = M \sin \varphi + 2N \cos^2 \varphi.$$

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, \varphi)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r} (ru_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \varphi < 2\pi; \\ |u(0, \varphi)| < \infty, \\ u(R, \varphi) = f(\varphi) = M \sin \varphi + 2N \cos^2 \varphi. \end{cases} \quad (11.32)$$

Шаг 1. Решение в общем виде.

Данная задача есть частный случай задачи, решённой нами на страницах 118 – 119. Воспользуемся результатом – формулами (11.19), (11.15) (11.16).

Так как α_k, β_k – коэффициенты разложения $f(\varphi)$ в тригонометрический ряд Фурье

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)), \quad (11.14)$$

а заданная нам функция $f(\varphi)$ уже записана практически в таком виде:

$$f(\varphi) = M \sin \varphi + 2N \cos^2 \varphi = \left[2 \cos^2 a = 1 + \cos 2a \right] = N + M \sin \varphi + N \cos 2\varphi, \quad (11.33)$$

то, очевидно,

$$\alpha_k = \begin{cases} 2N, & \text{при } k = 0; \\ N, & \text{при } k = 2; \\ 0 & \text{при } k \in \mathbb{N} \setminus \{2\}; \end{cases} \quad \beta_k = \begin{cases} M & \text{при } k = 1; \\ 0 & \text{при } k > 1. \end{cases} \quad (11.34)$$

Таким образом, подставив (11.34) в (11.19), получаем:

Ответ:

$$u(r, \varphi) = N + M \frac{r}{R} \sin \varphi + N \left(\frac{r}{R} \right)^2 \cos 2\varphi.$$

11.4. Внешняя задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа вне круга.

Найти ограниченную функцию $u(r, \varphi)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r} (ru_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, & R < r < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi; \\ |u(\infty, \varphi)| < \infty, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u(R, \varphi) = f(\varphi), & 0 < \varphi < 2\pi. \end{cases} \quad (11.35)$$

Шаг 1. Решение уравнения Лапласа вне круга.

Уравнения Лапласа вне круга мы уже решили на страницах 116 – 118 и получили формулу

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(r) \Phi_k(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^k} (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)). \quad (11.12)$$

Шаг 2. Использование краевого условия

В нашей задаче добавилось краевое условие

$$u(R, \varphi) = f(\varphi).$$

Оно позволит нам найти коэффициенты A_k и B_k в формуле (11.12).

Поскольку функции $\{1, \cos(k\varphi), \sin(k\varphi), k \in \mathbb{N}\}$ образуют полную ортогональную систему функций, то функцию $f(\varphi)$ можно разложить в ряд по этой системе – фактически, в тригонометрический ряд Фурье – на промежутке $\varphi \in (0, 2\pi)$:

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)), \quad (11.14)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (11.15)$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (11.16)$$

При этом ряд (11.14) сходится к $f(\varphi)$ абсолютно и равномерно на $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Приравняем ряд (11.12), взятый при $r = R$, к ряду (11.14):

$$\begin{aligned} u(R, \varphi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{R^k} (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) = \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)) = f(\varphi). \end{aligned}$$

Получаем при $k = 0$

$$\overbrace{A_0 \cos(0)}^{=1} + \overbrace{B_0 \sin(0)}^{=0} = \frac{\alpha_0}{2},$$

откуда

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad B_0 - \text{ произвольно.} \quad (11.36)$$

Аналогично, при $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{R^k} (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) = \alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi),$$

откуда в силу линейной независимости функций $\sin(k\varphi)$ и $\cos(k\varphi)$

$$A_k = R^k \alpha_k, \quad B_k = R^k \beta_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (11.37)$$

Ответ:

$$u(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^k (\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)), \quad (11.38)$$

где коэффициенты α_k и β_k определяются из формул

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (11.15)$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (11.16)$$

№ 720. а) Построить функцию $u(r, \varphi)$, гармоническую вне круга радиуса R , и удовлетворяющую краевому условию:

$$u(R, \varphi) = f(\varphi) = \varphi \sin \varphi.$$

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти ограниченную функцию $u(r, \varphi)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r} (ru_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, & R < r < +\infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi; \\ |u(+\infty, \varphi)| < \infty, \\ u(R, \varphi) = f(\varphi) = T \sin \frac{\varphi}{2}. \end{cases} \quad (11.39)$$

Шаг 1. Решение в общем виде.

Данная задача есть частный случай задачи, решённой нами в п. 11.4. Воспользуемся результатом:

Общее решение внешней задачи Дирихле:

$$u(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^k (\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)), \quad (11.38)$$

где коэффициенты α_k и β_k определяются из формул

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (11.15)$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (11.16)$$

Найдём коэффициенты α_k , β_k :

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi = \frac{T}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \frac{\varphi}{2} \cos(k\varphi) d\varphi = \\ &= \left[2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b) \right] = \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sin \frac{(2k+1)\varphi}{2} - \sin \frac{(2k-1)\varphi}{2} \right) d\varphi = \\ &= -\frac{T}{2\pi} \cdot \left(\frac{2}{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\varphi}{2} \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} - \frac{2}{2k-1} \cos \frac{(2k-1)\varphi}{2} \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \right) = \\ &= -\frac{T}{2\pi} \cdot \left(\frac{2}{2k+1} \cdot (-2) - \frac{2}{2k-1} \cdot (-2) \right) = \frac{2T}{\pi} \cdot \frac{-2}{4k^2-1} = \frac{-4T}{(4k^2-1)\pi}; \quad (11.40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi = \frac{T}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \frac{\varphi}{2} \sin(k\varphi) d\varphi = \\ &= \left[2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b) \right] = \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{(2k+1)\varphi}{2} - \cos \frac{(2k-1)\varphi}{2} \right) d\varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{T}{2\pi} \cdot \left(\frac{2}{2k+1} \sin \frac{(2k+1)\varphi}{2} \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} - \frac{2}{2k-1} \sin \frac{(2k-1)\varphi}{2} \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \right) = \\
&= \frac{T}{2\pi} \cdot \left(\frac{2}{2k+1} \cdot 0 - \frac{2}{2k-1} \cdot 0 \right) = 0. \quad (11.41)
\end{aligned}$$

Как обычно, α_0 следует находить отдельно:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = \frac{T}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = -\frac{T}{\pi} \cdot 2 \cos \frac{\varphi}{2} \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = -\frac{2T}{\pi} \cdot (-2) = \frac{4T}{\pi}. \quad (11.42)$$

Наконец, подставив (11.42), (11.40), (11.41) в (11.38), получаем:

Ответ:

$$u(r, \varphi) = \frac{2T}{\pi} - \frac{4T}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^k \frac{\cos(k\varphi)}{4k^2 - 1}.$$

№ 720^M. 6) Построить функцию $u(r, \varphi)$, гармоническую вне круга радиуса R , и удовлетворяющую краевому условию:

$$u(R, \varphi) = f(\varphi) = M \cos \varphi + 2N \sin^2 \varphi.$$

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, \varphi)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r} (ru_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \varphi < 2\pi; \\ |u(+\infty, \varphi)| < \infty, \\ u(R, \varphi) = f(\varphi) = M \cos \varphi + 2N \sin^2 \varphi. \end{cases} \quad (11.43)$$

Шаг 1. Решение в общем виде.

Данная задача есть частный случай задачи, решённой нами в начале этого параграфа. Воспользуемся результатом – формулами (11.38), (11.15), (11.16).

Так как α_k, β_k – коэффициенты разложения $f(\varphi)$ в тригонометрический ряд Фурье

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)), \quad (11.14)$$

а заданная нам функция $f(\varphi)$ уже записана практически в таком виде:

$$f(\varphi) = M \cos \varphi + 2N \sin^2 \varphi = \left[2 \sin^2 a = 1 - \cos 2a \right] = N + M \cos \varphi - N \cos 2\varphi, \quad (11.44)$$

то, очевидно,

$$\alpha_k = \begin{cases} 2N, & \text{при } k = 0; \\ M, & \text{при } k = 1; \\ -N, & \text{при } k = 2; \\ 0 & \text{при } k > 2; \end{cases} \quad \beta_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (11.45)$$

Таким образом, подставив (11.45) в (11.38), получаем:

Ответ:

$$u(r, \varphi) = N + M \frac{R}{r} \cos \varphi - N \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos 2\varphi.$$

11.5. Внутренняя задача Неймана для уравнения Лапласа в круге

№ 719 г). Найти ограниченную функцию $u(r, \varphi)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r} (ru_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \varphi < 2\pi; \\ |u(0, \varphi)| < \infty, \\ u_r(R, \varphi) = f(\varphi). \end{cases} \quad (11.46)$$

Шаг 1. Решение уравнения Лапласа в круге.

Для решения уравнения Лапласа в круге мы уже получили формулу

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(r) \Phi_k(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)). \quad (11.11)$$

Шаг 2. Использование краевого условия.

В нашей задаче задано краевое условие II-го рода – **условие Неймана**:

$$u_r(R, \varphi) = f(\varphi).$$

Оно позволит нам найти коэффициенты A_k и B_k в формуле (11.11).

Поскольку функции $\{1, \cos(k\varphi), \sin(k\varphi), k \in \mathbb{N}\}$ образуют полную ортогональную систему функций, то функцию $f(\varphi)$ можно разложить в ряд по этой системе – фактически, в тригонометрический ряд Фурье – на промежутке $\varphi \in (0, 2\pi)$:

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)), \quad (11.47)$$

$$\alpha_k = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (11.48)$$

$$\beta_k = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (11.49)$$

При этом ряд (11.47) сходится к $f(\varphi)$ абсолютно и равномерно на $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Приравняем ряд

$$u_r(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} k r^{k-1} (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)), \quad (11.50)$$

взятый при $r = R$, к ряду (11.47):

$$\begin{aligned} u_r(R, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} k R^{k-1} (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) = \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)) = f(\varphi) \end{aligned}$$

Получаем при $k = 0$:

$$0 = \frac{\alpha_0}{2}.$$

Это равенство есть условие на функцию $f(\varphi)$, а требований на A_0, B_0 не накладывает, они могут быть любыми. На практике это означает, что задача Неймана имеет бесконечное семейство решений, отличающихся на константу.

$$A_0, B_0 - \text{произвольны.} \quad (11.51)$$

При $k \in \mathbb{N}$

$$k R^{k-1} (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) = \alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi),$$

откуда в силу линейной независимости функций $\sin(k\varphi)$ и $\cos(k\varphi)$

$$A_k = \frac{\alpha_k}{k R^{k-1}}, \quad B_k = \frac{\beta_k}{k R^{k-1}}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (11.52)$$

Ответ:

$$u(r, \varphi) = c + R \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k \cdot \frac{\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)}{k}, \quad (11.53)$$

где коэффициенты α_k и β_k определяются из формул (11.48), (11.49), а функция $f(\varphi)$ удовлетворяет условию $\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0$ (в противном случае решения в виде подобного ряда не существует).

11.6. Внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа в круге

№ 720 б)^{ММ}. Найти ограниченную функцию $u(r, \varphi)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r} (ru_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, & R < r < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi; \\ |u(\infty, \varphi)| < \infty, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u_r(R, \varphi) = f(\varphi), & 0 < \varphi < 2\pi. \end{cases} \quad (11.54)$$

Шаг 1. Решение уравнения Лапласа вне круга.

Для решения уравнения Лапласа вне круга мы уже получили формулу

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^k} (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)). \quad (11.12)$$

Шаг 2. Использование краевого условия.

В нашей задаче задано краевое условие II-го рода – **условие Неймана**:

$$u_r(R, \varphi) = f(\varphi).$$

Оно позволит нам найти коэффициенты A_k и B_k в формуле (11.12).

Поскольку функции $\{1, \cos(k\varphi), \sin(k\varphi), k \in \mathbb{N}\}$ образуют полную ортогональную систему функций, то функцию $f(\varphi)$ можно разложить в ряд по этой системе – фактически, в тригонометрический ряд Фурье – на промежутке $\varphi \in (0, 2\pi)$:

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)), \quad (11.47)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (11.48)$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (11.49)$$

При этом ряд (11.47) сходится к $f(\varphi)$ абсолютно и равномерно на $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Приравняем ряд

$$u_r(r, \varphi) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{r^{k+1}} (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)), \quad (11.55)$$

взятый при $r = R$, к ряду (11.47)

$$\begin{aligned} u_r(R, \varphi) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R^{k+1}} (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) = \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)) = f(\varphi). \end{aligned}$$

Получаем при $k = 0$

$$0 = \frac{\alpha_0}{2}.$$

Это равенство есть условие на функцию $f(\varphi)$, а требований на A_0, B_0 не накладывает, они могут быть любыми. На практике это означает, что задача Неймана имеет бесконечное семейство решений, отличающихся на константу.

$$A_0, B_0 - \text{произвольны.} \quad (11.56)$$

При $k \in \mathbb{N}$

$$- \frac{k}{R^{k+1}} (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) = \alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi),$$

откуда в силу линейной независимости функций $\sin(k\varphi)$ и $\cos(k\varphi)$

$$A_k = -\frac{R^{k+1}}{k} \alpha_k, \quad B_k = -\frac{R^{k+1}}{k} \beta_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (11.57)$$

Ответ:

$$u(r, \varphi) = c - R \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^k \cdot \frac{\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)}{k}, \quad (11.58)$$

где коэффициенты α_k и β_k определяются из формул

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (11.48)$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (11.49)$$

а функция $f(\varphi)$ удовлетворяет условию $\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0$ (в противном случае решения в виде подобного ряда не существует).

11.7. Внутренняя задача III-го рода для уравнения Лапласа в круге

Найти ограниченную функцию $u(r, \varphi)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r} (ru_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \varphi < 2\pi; \\ |u(0, \varphi)| < \infty, \\ u_r(R, \varphi) + hu(R, \varphi) = f(\varphi). \end{cases} \quad (11.59)$$

Шаг 1. Решение уравнения Лапласа в круге.

Для решения уравнения Лапласа в круге мы уже получили формулу

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)). \quad (11.11)$$

Шаг 2. Использование краевого условия.

В нашей задаче задано краевое условие III-го рода:

$$u_r(R, \varphi) + hu(R, \varphi) = f(\varphi).$$

Оно позволит нам найти коэффициенты A_k и B_k в формуле (11.11).

Функцию $f(\varphi)$ можно разложить в тригонометрический ряд Фурье – на про-

межутке $\varphi \in (0, 2\pi)$:

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)), \quad (11.47)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (11.48)$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (11.49)$$

При этом ряд (11.47) сходится к $f(\varphi)$ абсолютно и равномерно на $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Приравняем ряд

$$\begin{aligned} u_r(r, \varphi) + hu(R, \varphi) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} kr^{k-1} (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) + h \sum_{k=0}^{\infty} r^k (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) = \\ &= hA_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} (k + hr) (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) \end{aligned} \quad (11.60)$$

взятый при $r = R$, к ряду (11.47):

$$\begin{aligned} u_r(R, \varphi) + hu(R, \varphi) &= hA_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R^{k-1} (k + hR) (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) = \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)) = f(\varphi). \end{aligned}$$

Получаем при $k = 0$

$$hA_0 = \frac{\alpha_0}{2},$$

откуда

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2h}, \quad B_0 - \text{произвольно}. \quad (11.61)$$

При $k \in \mathbb{N}$

$$R^{k-1} (k + hR) (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) = \alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi),$$

откуда в силу линейной независимости функций $\sin(k\varphi)$ и $\cos(k\varphi)$

$$A_k = \frac{\alpha_k}{R^{k-1}(k + hR)}, \quad B_k = \frac{\beta_k}{R^{k-1}(k + hR)}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (11.62)$$

Ответ:

$$u(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2h} + R \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k \cdot \frac{\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)}{k + hR}, \quad (11.63)$$

где коэффициенты α_k и β_k определяются из формул

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (11.48)$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (11.49)$$

12. Внешняя задача III-го рода для уравнения Лапласа в круге

№ 720. в) Найти ограниченную функцию $u(r, \varphi)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r} (ru_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, & R < r < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi; \\ |u(\infty, \varphi)| < \infty, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u_r(R, \varphi) - hu(R, \varphi) = f(\varphi), & 0 < \varphi < 2\pi. \end{cases} \quad (12.1)$$

Шаг 1. Решение уравнения Лапласа вне круга.

Для решения уравнения Лапласа вне круга мы уже получили формулу

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^k} (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)). \quad (11.12)$$

Шаг 2. Использование краевого условия.

В нашей задаче задано краевое условие III-го рода – **условие Неймана**:

$$u_r(R, \varphi) - hu(R, \varphi) = f(\varphi).$$

Оно позволит нам найти коэффициенты A_k и B_k в формуле (11.12).

Воспользуемся разложением функции $f(\varphi)$ в тригонометрический ряд Фурье на промежутке $\varphi \in (0, 2\pi)$:

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)), \quad (11.47)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (11.48)$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (11.49)$$

Приравняем ряд

$$\begin{aligned}
 u_r(r, \varphi) - hu(r, \varphi) &= \\
 &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{r^{k+1}} (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) - h \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^k} (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) = \\
 &= -hA_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + hr}{r^{k+1}} (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)), \quad (12.2)
 \end{aligned}$$

взятый при $r = R$, к ряду (11.47):

$$\begin{aligned}
 u_r(R, \varphi) - hu(R, \varphi) &= -hA_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + hR}{R^{k+1}} (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) = \\
 &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)) = f(\varphi)
 \end{aligned}$$

Получаем при $k = 0$

$$-hA_0 = \frac{\alpha_0}{2},$$

откуда

$$A_0 = -\frac{\alpha_0}{2h}, \quad B_0 \text{ — произвольны.} \quad (12.3)$$

При $k \in \mathbb{N}$

$$-\frac{k + hR}{R^{k+1}} (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) = \alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi),$$

откуда в силу линейной независимости функций $\sin(k\varphi)$ и $\cos(k\varphi)$

$$A_k = -\frac{R^{k+1}}{k + hR} \cdot \alpha_k, \quad B_k = -\frac{R^{k+1}}{k + hR} \cdot \beta_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (12.4)$$

Ответ:

$$u(r, \varphi) = -\frac{\alpha_0}{2h} - R \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^k \cdot \frac{\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)}{k + hR}, \quad (12.5)$$

где коэффициенты α_k и β_k определяются из формул

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (11.48)$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (11.49)$$

13. Уравнение Лапласа в кольце

Для уравнения Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r} (ru_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0 \quad (13.1)$$

как внутри круга:

$$0 \leq r < b, \quad \varphi \in [0, 2\pi),$$

так и вне круга:

$$a < r < +\infty, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

нами были найдены ограниченные решения:

общее решение уравнения Лапласа в круге

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(r) \Phi_k(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)), \quad (13.2)$$

общее решение уравнения Лапласа вне круга

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(r) \Phi_k(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^k} (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)). \quad (13.3)$$

Это позволит нам решить краевые задачи в более сложной области – в кольце.

13.1. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце

Найти ограниченную функцию $u(r, \varphi)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r} (ru_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, & 0 < a \leq r < b, \quad 0 < \varphi < 2\pi; \\ |u(r, \varphi)| < \infty, \\ u(a, \varphi) = f_1(\varphi), \\ u(b, \varphi) = f_2(\varphi). \end{cases} \quad (13.4)$$

Шаг 1. Решение уравнения Лапласа в полярных координатах.

Сложив решения уравнения Лапласа в круге и вне круга, мы получим общее решение уравнения Лапласа в полярных координатах:

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^k (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)). \quad (13.5)$$

Оно не является, вообще говоря, ограниченным ни в круге, ни вне круга, так как функции r^k бесконечно растут:

1) при $r \rightarrow +0$ и $k < 0$,

2) при $r \rightarrow +\infty$ и $k > 0$.

Но в нашей задаче нам надо найти ограниченные решения в кольце $0 < a < r < b < +\infty$, а в нём все эти функции ограничены. Поэтому нам

осталось лишь найти коэффициенты A_k, B_k из краевых условий. Однако нам ещё следует учесть, что $\cos x$ – чётная функция, а $\sin x$ – нечётная:

$$\cos(-k\varphi) = \cos(k\varphi), \quad \sin(-k\varphi) = -\sin(k\varphi).$$

Кроме того, функция $\ln r$ является решением уравнения $\Delta u(r, \varphi) = 0$, но мы её в формулах (13.2) и (13.3) не учитывали, так как она не является ограниченной ни внутри, ни вне круга. Однако **она является ограниченной в кольце** $0 < a < r < b < +\infty$, поэтому её придётся учитывать в формуле общего решения в кольце. Удобнее всего добавить слагаемое $B_0 \ln r$, поскольку коэффициент B_0 в формулах (13.2) и (13.3) умножается на $\sin 0 = 0$ и может поэтому принимать любые значения.

С учётом всех приведённых соображений перепишем ряд (13.5) так, чтобы полученная формула действительно задавала общее решение уравнения Лапласа:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= B_0 \ln r + \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^k (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) = \\ &= B_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k} (A_{-k} \cos(k\varphi) - B_{-k} \sin(k\varphi)) + \\ &\quad + A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) = \\ &= A_0 + B_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} ((A_k r^k + A_{-k} r^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k r^k - B_{-k} r^{-k}) \sin(k\varphi)). \end{aligned}$$

Итак,

$$u(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} ((A_k r^k + A_{-k} r^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k r^k - B_{-k} r^{-k}) \sin(k\varphi)). \quad (13.6)$$

Шаг 2. Использование краевых условий.

В нашей задаче на обеих частях границы задано краевое условие I-го рода – **условие Дирихле**:

$$u(a, \varphi) = f_1(\varphi), \quad u(b, \varphi) = f_2(\varphi).$$

Воспользуемся разложением функций $f_{1,2}(\varphi)$ в тригонометрический ряд Фурье на промежутке $\varphi \in (0, 2\pi)$:

$$f_1(\varphi) = \frac{\alpha_{10}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{1k} \cos(k\varphi) + \beta_{1k} \sin(k\varphi)), \quad (13.7)$$

$$f_2(\varphi) = \frac{\alpha_{20}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{2k} \cos(k\varphi) + \beta_{2k} \sin(k\varphi)), \quad (13.8)$$

$$\alpha_{jk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_j(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad j \in \{1, 2\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (13.9)$$

$$\beta_{jk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_j(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad j \in \{1, 2\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (13.10)$$

Приравняем ряд

$$u(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} \left((A_k r^k + A_{-k} r^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k r^k - B_{-k} r^{-k}) \sin(k\varphi) \right), \quad (13.11)$$

взятый при $r = a$ и $r = b$, к рядам (13.7) и (13.8):

$$u(a, \varphi) = A_0 + B_0 \ln a + \sum_{k=1}^{\infty} \left((A_k a^k + A_{-k} a^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k a^k - B_{-k} a^{-k}) \sin(k\varphi) \right) = \frac{\alpha_{10}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{1k} \cos(k\varphi) + \beta_{1k} \sin(k\varphi)) = f_1(\varphi);$$

$$u(b, \varphi) = A_0 + B_0 \ln b + \sum_{k=1}^{\infty} \left((A_k b^k + A_{-k} b^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k b^k - B_{-k} b^{-k}) \sin(k\varphi) \right) = \frac{\alpha_{20}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{2k} \cos(k\varphi) + \beta_{2k} \sin(k\varphi)) = f_2(\varphi).$$

Получаем при $k = 0$:

$$A_0 + B_0 \ln a = \frac{\alpha_{10}}{2}, \quad A_0 + B_0 \ln b = \frac{\alpha_{20}}{2},$$

откуда, выразив A_0 , B_0 через числа α_{10} , α_{20} , получим:

$$A_0 = \frac{\alpha_{10} \ln b - \alpha_{20} \ln a}{2 \ln \frac{b}{a}}, \quad B_0 = \frac{\alpha_{20} - \alpha_{10}}{2 \ln \frac{b}{a}}. \quad (13.12)$$

При остальных k :

$$\begin{aligned} (A_k a^k + A_{-k} a^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k a^k - B_{-k} a^{-k}) \sin(k\varphi) &= \alpha_{1k} \cos(k\varphi) + \beta_{1k} \sin(k\varphi); \\ (A_k b^k + A_{-k} b^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k b^k - B_{-k} b^{-k}) \sin(k\varphi) &= \alpha_{2k} \cos(k\varphi) + \beta_{2k} \sin(k\varphi). \end{aligned}$$

В силу линейной независимости функций $\sin(k\varphi)$ и $\cos(k\varphi)$, получаем при каждом $k \in \mathbb{N}$ систему из четырёх уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{pmatrix} a^k & a^{-k} \\ b^k & b^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ A_{-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a^k & -a^{-k} \\ b^k & -b^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_k \\ B_{-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (13.13)$$

Матрицы обеих систем $\begin{pmatrix} a^k & a^{-k} \\ b^k & b^{-k} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a^k & -a^{-k} \\ b^k & -b^{-k} \end{pmatrix}$ обратимы, так как при $a \neq b$ их определители не равны нулю:

$$\det \begin{pmatrix} a^k & a^{-k} \\ b^k & b^{-k} \end{pmatrix} = a^k b^{-k} - a^{-k} b^k = \frac{a^{2k} - b^{2k}}{a^k b^k} \neq 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} a^k & -a^{-k} \\ b^k & -b^{-k} \end{pmatrix} = -a^k b^{-k} + a^{-k} b^k = \frac{b^{2k} - a^{2k}}{a^k b^k} \neq 0,$$

Найдём $\begin{pmatrix} a^k & a^{-k} \\ b^k & b^{-k} \end{pmatrix}^{-1}$ и $\begin{pmatrix} a^k & -a^{-k} \\ b^k & -b^{-k} \end{pmatrix}^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} a^k & a^{-k} \\ b^k & b^{-k} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{a^k b^k}{a^{2k} - b^{2k}} \begin{pmatrix} b^{-k} & -a^{-k} \\ -b^k & a^k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a^k & -a^{-k} \\ b^k & -b^{-k} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{a^k b^k}{b^{2k} - a^{2k}} \begin{pmatrix} -b^{-k} & a^{-k} \\ -b^k & a^k \end{pmatrix}$$

Тогда из систем (13.13) получаем:

$$\begin{pmatrix} A_k \\ A_{-k} \end{pmatrix} = \frac{a^k b^k}{a^{2k} - b^{2k}} \begin{pmatrix} b^{-k} & -a^{-k} \\ -b^k & a^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B_k \\ B_{-k} \end{pmatrix} = \frac{a^k b^k}{b^{2k} - a^{2k}} \begin{pmatrix} -b^{-k} & a^{-k} \\ -b^k & a^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} A_k = \frac{1}{a^{2k} - b^{2k}} (a^k \alpha_{1k} - b^k \alpha_{2k}); \\ A_{-k} = \frac{a^k b^k}{a^{2k} - b^{2k}} (-b^k \alpha_{1k} + a^k \alpha_{2k}); \\ B_k = \frac{1}{a^{2k} - b^{2k}} (a^k \beta_{1k} - b^k \beta_{2k}); \\ B_{-k} = \frac{a^k b^k}{a^{2k} - b^{2k}} (b^k \beta_{1k} - a^k \beta_{2k}). \end{cases} \quad (13.14)$$

Ответ:

$$u(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} ((A_k r^k + A_{-k} r^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k r^k - B_{-k} r^{-k}) \sin(k\varphi)), \quad (13.15)$$

где коэффициенты $A_{\pm k}$ и $B_{\pm k}$ определяются из формул (13.12), (13.14), а

$$\alpha_{jk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_j(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (13.9)$$

$$\beta_{jk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_j(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (13.10)$$

13.2. Задача Неймана для уравнения Лапласа в кольце

Найти ограниченную функцию $u(r, \varphi)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, & 0 < a < r < b, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ |u(r, \varphi)| < \infty, & a < r < b, \quad 0 < \varphi < 2\pi; \\ u_r(a, \varphi) = f_1(\varphi), & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u_r(b, \varphi) = f_2(\varphi), & 0 < \varphi < 2\pi. \end{cases} \quad (13.16)$$

Шаг 1. Решение уравнения Лапласа в полярных координатах.

Сложив решения уравнения Лапласа в круге и вне круга, мы в точности как в п. 13.1, получим общее решение уравнения Лапласа в полярных координатах:

$$u(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} \left((A_k r^k + A_{-k} r^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k r^k - B_{-k} r^{-k}) \sin(k\varphi) \right). \quad (13.6)$$

Шаг 2. Использование краевых условий.

В нашей задаче на обеих частях границы задано краевое условие II-го рода – **условие Неймана**:

$$u_r(a, \varphi) = f_1(\varphi), \quad u_r(b, \varphi) = f_2(\varphi).$$

Воспользуемся разложением функций $f_{1,2}(\varphi)$ в тригонометрический ряд Фурье на промежутке $\varphi \in (0, 2\pi)$:

$$f_1(\varphi) = \frac{\alpha_{10}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{1k} \cos(k\varphi) + \beta_{1k} \sin(k\varphi)), \quad (13.7)$$

$$f_2(\varphi) = \frac{\alpha_{20}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{2k} \cos(k\varphi) + \beta_{2k} \sin(k\varphi)), \quad (13.8)$$

$$\alpha_{jk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_j(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad j \in \{1, 2\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (13.9)$$

$$\beta_{jk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_j(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad j \in \{1, 2\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (13.10)$$

Продифференцируем (13.11) по r и приравняем ряд

$$u_r(r, \varphi) = \frac{B_0}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} \left((kA_k r^{k-1} - kA_{-k} r^{-k-1}) \cos(k\varphi) + (kB_k r^{k-1} + kB_{-k} r^{-k-1}) \sin(k\varphi) \right), \quad (13.17)$$

взятый при $r = a$ и $r = b$, к рядам (13.7) и (13.8):

$$\begin{aligned} u_r(a, \varphi) &= \frac{B_0}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \left((kA_k r^{k-1} - kA_{-k} r^{-k-1}) \cos(k\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + (kB_k r^{k-1} + kB_{-k} r^{-k-1}) \sin(k\varphi) \right) = \\ &= \frac{\alpha_{10}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{1k} \cos(k\varphi) + \beta_{1k} \sin(k\varphi)) = f_1(\varphi); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_r(b, \varphi) &= \frac{B_0}{b} + \sum_{k=1}^{\infty} \left((kA_k r^{k-1} - kA_{-k} r^{-k-1}) \cos(k\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + (kB_k r^{k-1} + kB_{-k} r^{-k-1}) \sin(k\varphi) \right) = \\ &= \frac{\alpha_{20}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{2k} \cos(k\varphi) + \beta_{2k} \sin(k\varphi)) = f_2(\varphi); \end{aligned}$$

Получаем при $k = 0$

$$B_0 = \frac{a\alpha_{10}}{2} = \frac{b\alpha_{20}}{2}.$$

Это равенство есть условие на функции $f_{1,2}(\varphi)$, так как для них должно выполняться равенство $a\alpha_{10} = b\alpha_{20}$, то есть

$$a \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) d\varphi = b \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) d\varphi, \quad (13.18)$$

а на A_0 никаких ограничений не накладывает:

$$A_0 \text{ — произвольно, } B_0 = \frac{a\alpha_{10}}{2} = \frac{b\alpha_{20}}{2}. \quad (13.19)$$

При остальных k :

$$\begin{aligned} k(A_k a^{k-1} - A_{-k} a^{-k-1}) \cos(k\varphi) + k(B_k a^{k-1} + B_{-k} a^{-k-1}) \sin(k\varphi) &= \\ &= \alpha_{1k} \cos(k\varphi) + \beta_{1k} \sin(k\varphi); \\ k(A_k b^{k-1} - A_{-k} b^{-k-1}) \cos(k\varphi) + k(B_k b^{k-1} + B_{-k} b^{-k-1}) \sin(k\varphi) &= \\ &= \alpha_{2k} \cos(k\varphi) + \beta_{2k} \sin(k\varphi). \end{aligned}$$

В силу линейной независимости функций $\sin(k\varphi)$ и $\cos(k\varphi)$, получаем при каждом $k \in \mathbb{N}$ систему из четырёх уравнений с четырьмя неизвестными:

$$k \cdot \begin{pmatrix} a^{k-1} & -a^{-k-1} \\ b^{k-1} & -b^{-k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ A_{-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \end{pmatrix}, \quad k \cdot \begin{pmatrix} a^{k-1} & a^{-k-1} \\ b^{k-1} & b^{-k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_k \\ B_{-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{pmatrix}. \quad (13.20)$$

Матрицы обеих систем $\begin{pmatrix} a^{k-1} & -a^{-k-1} \\ b^{k-1} & -b^{-k-1} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a^{k-1} & a^{-k-1} \\ b^{k-1} & b^{-k-1} \end{pmatrix}$ обратимы, так как при $a \neq b$ их определители не равны нулю:

$$\det \begin{pmatrix} a^{k-1} & -a^{-k-1} \\ b^{k-1} & -b^{-k-1} \end{pmatrix} = -a^{k-1}b^{-k-1} + a^{-k-1}b^{k-1} = \frac{b^{2k} - a^{2k}}{a^{k+1}b^{k+1}} \neq 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} a^{k-1} & a^{-k-1} \\ b^{k-1} & b^{-k-1} \end{pmatrix} = a^{k-1}b^{-k-1} - a^{-k-1}b^{k-1} = \frac{a^{2k} - b^{2k}}{a^{k+1}b^{k+1}} \neq 0.$$

Найдём $\begin{pmatrix} a^{k-1} & -a^{-k-1} \\ b^{k-1} & -b^{-k-1} \end{pmatrix}^{-1}$ и $\begin{pmatrix} a^{k-1} & a^{-k-1} \\ b^{k-1} & b^{-k-1} \end{pmatrix}^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} a^{k-1} & -a^{-k-1} \\ b^{k-1} & -b^{-k-1} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{a^{k+1}b^{k+1}}{b^{2k} - a^{2k}} \begin{pmatrix} -b^{-k-1} & a^{-k-1} \\ -b^{k-1} & a^{k-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a^{k-1} & a^{-k-1} \\ b^{k-1} & b^{-k-1} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{a^{k+1}b^{k+1}}{a^{2k} - b^{2k}} \begin{pmatrix} b^{-k-1} & -a^{-k-1} \\ -b^{k-1} & a^{k-1} \end{pmatrix}$$

Тогда из систем (13.20) получаем:

$$\begin{pmatrix} A_k \\ A_{-k} \end{pmatrix} = \frac{a^{k+1}b^{k+1}}{k(b^{2k} - a^{2k})} \begin{pmatrix} -b^{-k-1} & a^{-k-1} \\ -b^{k-1} & a^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} B_k \\ B_{-k} \end{pmatrix} = \frac{a^{k+1}b^{k+1}}{k(a^{2k} - b^{2k})} \begin{pmatrix} b^{-k-1} & -a^{-k-1} \\ -b^{k-1} & a^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} A_k = \frac{1}{k(b^{2k} - a^{2k})} (-a^{k+1}\alpha_{1k} + b^{k+1}\alpha_{2k}); \\ A_{-k} = \frac{a^k b^k}{k(b^{2k} - a^{2k})} (-b^{k-1}\alpha_{1k} + a^{k-1}\alpha_{2k}); \\ B_k = \frac{1}{k(a^{2k} - b^{2k})} (a^{k+1}\beta_{1k} - b^{k+1}\beta_{2k}); \\ B_{-k} = \frac{a^k b^k}{k(a^{2k} - b^{2k})} (-b^{k-1}\beta_{1k} + a^{k-1}\beta_{2k}). \end{cases} \quad (13.21)$$

Ответ: $u(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r +$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} ((A_k r^k + A_{-k} r^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k r^k - B_{-k} r^{-k}) \sin(k\varphi)), \quad (13.22)$$

где A_0 произвольно, а коэффициенты B_0 , $A_{\pm k}$ и $B_{\pm k}$ определяются из формул (13.19), (13.21), а

$$\alpha_{jk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_j(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (13.9)$$

$$\beta_{jk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_j(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (13.10)$$

При этом необходимо, чтобы функции $f_{1,2}(\varphi)$ удовлетворяли условию $a \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) d\varphi = b \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) d\varphi$ (в противном случае решения в виде подобного ряда не существует).

13.3. Задача III-го рода для уравнения Лапласа в кольце

Найти ограниченную функцию $u(r, \varphi)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r} (ru_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, & 0 < a < r < b, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ |u(r, \varphi)| < \infty, & a < r < b, \quad 0 < \varphi < 2\pi; \\ u_r(a, \varphi) - hu(a, \varphi) = f_1(\varphi), & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u_r(b, \varphi) + Hu(b, \varphi) = f_2(\varphi), & 0 < \varphi < 2\pi. \end{cases} \quad (13.23)$$

При этом $h, H > 0$ и $ah \notin \mathbb{N}$.

Шаг 1. Решение уравнения Лапласа в полярных координатах.

Сложив решения уравнения Лапласа в круге и вне круга, мы в точности как в задаче I, получим общее решение уравнения Лапласа в полярных координатах:

$$u(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} \left((A_k r^k + A_{-k} r^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k r^k - B_{-k} r^{-k}) \sin(k\varphi) \right). \quad (13.6)$$

Шаг 2. Использование краевых условий.

В нашей задаче на обеих частях границы задано краевое условие III-го рода:

$$u_r(a, \varphi) - hu(a, \varphi) = f_1(\varphi), \quad u_r(b, \varphi) + Hu(b, \varphi) = f_2(\varphi).$$

Воспользуемся разложением функций $f_{1,2}(\varphi)$ в тригонометрический ряд Фурье на промежутке $\varphi \in (0, 2\pi)$:

$$f_1(\varphi) = \frac{\alpha_{10}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{1k} \cos(k\varphi) + \beta_{1k} \sin(k\varphi)), \quad (13.7)$$

$$f_2(\varphi) = \frac{\alpha_{20}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{2k} \cos(k\varphi) + \beta_{2k} \sin(k\varphi)), \quad (13.8)$$

$$\alpha_{jk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_j(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad j \in \{1, 2\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (13.9)$$

$$\beta_{jk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_j(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad j \in \{1, 2\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (13.10)$$

Продифференцируем (13.11) по r и сложим ряд

$$u_r(r, \varphi) = \frac{B_0}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} \left((kA_k r^{k-1} - kA_{-k} r^{-k-1}) \cos(k\varphi) + (kB_k r^{k-1} + kB_{-k} r^{-k-1}) \sin(k\varphi) \right), \quad (13.17)$$

взятый при $r = a$ и $r = b$, с рядом (13.11), умноженным на $(-h)$ при $r = a$ и на H при $r = b$:

$$\begin{aligned} u_r(a, \varphi) - hu(a, \varphi) &= \\ &= \frac{B_0}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \left((kA_k a^{k-1} - kA_{-k} a^{-k-1}) \cos(k\varphi) + (kB_k a^{k-1} + kB_{-k} a^{-k-1}) \sin(k\varphi) \right) - \\ &- hA_0 - hB_0 \ln a - h \sum_{k=1}^{\infty} \left((A_k a^k + A_{-k} a^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k a^k - B_{-k} a^{-k}) \sin(k\varphi) \right) = \\ &= -hA_0 + B_0 \left(\frac{1}{a} - h \ln a \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left((A_k(k - ah)a^{k-1} - A_{-k}(k - ah)a^{-k-1}) \cos(k\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + (B_k(k - ah)a^{k-1} + B_{-k}(k - ah)a^{-k-1}) \sin(k\varphi) \right); \quad (13.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_r(b, \varphi) + Hu(b, \varphi) &= \\ &= \frac{B_0}{b} + \sum_{k=1}^{\infty} \left((kA_k b^{k-1} - kA_{-k} b^{-k-1}) \cos(k\varphi) + (kB_k b^{k-1} + kB_{-k} b^{-k-1}) \sin(k\varphi) \right) + \\ &+ HA_0 + HB_0 \ln b + H \sum_{k=1}^{\infty} \left((A_k b^k + A_{-k} b^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k b^k - B_{-k} b^{-k}) \sin(k\varphi) \right) = \\ &= HA_0 + B_0 \left(\frac{1}{b} + H \ln b \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left((A_k(k + bH)b^{k-1} - A_{-k}(k + bH)b^{-k-1}) \cos(k\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + (B_k(k + bH)b^{k-1} + B_{-k}(k + bH)b^{-k-1}) \sin(k\varphi) \right). \quad (13.25) \end{aligned}$$

Чтобы использовать краевые условия, приравняем ряды (13.24), (13.25) к рядам (13.7) и (13.8):

$$\begin{aligned} u_r(a, \varphi) - hu(a, \varphi) &= \\ &= -hA_0 + B_0 \left(\frac{1}{a} - h \ln a \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left((A_k(k - ah)a^{k-1} - A_{-k}(k - ah)a^{-k-1}) \cos(k\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + (B_k(k - ah)a^{k-1} + B_{-k}(k - ah)a^{-k-1}) \sin(k\varphi) \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha_{10}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{1k} \cos(k\varphi) + \beta_{1k} \sin(k\varphi)) = f_1(\varphi);$$

$$\begin{aligned} u_r(b, \varphi) + Hu(b, \varphi) &= \\ &= HA_0 + B_0 \left(\frac{1}{b} + H \ln b \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left((A_k(k + bH)b^{k-1} - A_{-k}(k + bH)b^{-k-1}) \cos(k\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + (B_k(k + bH)b^{k-1} + B_{-k}(k + bH)b^{-k-1}) \sin(k\varphi) \right) = \\ &= \frac{\alpha_{20}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{2k} \cos(k\varphi) + \beta_{2k} \sin(k\varphi)) = f_2(\varphi). \end{aligned}$$

Получаем при $k = 0$

$$-hA_0 + B_0 \left(\frac{1}{a} - h \ln a \right) = \frac{\alpha_{10}}{2}, \quad HA_0 + B_0 \left(\frac{1}{b} + H \ln b \right) = \frac{\alpha_{20}}{2},$$

откуда A_0 и B_0 находятся однозначно:

$$A_0 = \frac{\alpha_{20} \left(\frac{1}{a} - h \ln a \right) - \alpha_{10} \left(\frac{1}{b} + H \ln b \right)}{2 \left(\frac{H}{a} + \frac{h}{b} + Hh \ln \frac{b}{a} \right)}, \quad B_0 = \frac{H\alpha_{10} + h\alpha_{20}}{2 \left(\frac{H}{a} + \frac{h}{b} + Hh \ln \frac{b}{a} \right)}. \quad (13.26)$$

При остальных k в силу линейной независимости функций $\sin(k\varphi)$ и $\cos(k\varphi)$:

$$A_k(k - ah)a^{k-1} - A_{-k}(k - ah)a^{-k-1} = \alpha_{1k};$$

$$B_k(k - ah)a^{k-1} + B_{-k}(k - ah)a^{-k-1} = \beta_{1k};$$

$$A_k(k + bH)b^{k-1} - A_{-k}(k + bH)b^{-k-1} = \alpha_{2k};$$

$$B_k(k + bH)b^{k-1} + B_{-k}(k + bH)b^{-k-1} = \beta_{2k}.$$

Запишем эту систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} (k - ah)a^{k-1} & -(k - ah)a^{-k-1} \\ (k + bH)b^{k-1} & -(k + bH)b^{-k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ A_{-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (13.27)$$

$$\begin{pmatrix} (k - ah)a^{k-1} & (k - ah)a^{-k-1} \\ (k + bH)b^{k-1} & (k + bH)b^{-k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_k \\ B_{-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (13.28)$$

Матрицы обеих систем

$\begin{pmatrix} (k - ah)a^{k-1} & -(k - ah)a^{-k-1} \\ (k + bH)b^{k-1} & -(k + bH)b^{-k-1} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} (k - ah)a^{k-1} & (k - ah)a^{-k-1} \\ (k + bH)b^{k-1} & (k + bH)b^{-k-1} \end{pmatrix}$ обратимы, так как при $a \neq b$ и $ah \notin \mathbb{N}$ их определители не равны нулю:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} (k - ah)a^{k-1} & -(k - ah)a^{-k-1} \\ (k + bH)b^{k-1} & -(k + bH)b^{-k-1} \end{pmatrix} &= (k - ah)(k + bH) \cdot \det \begin{pmatrix} a^{k-1} & -a^{-k-1} \\ b^{k-1} & -b^{-k-1} \end{pmatrix} = \\ &= (k - ah)(k + bH) (-a^{k-1}b^{-k-1} + a^{-k-1}b^{k-1}) = (k - ah)(k + bH) \cdot \frac{b^{2k} - a^{2k}}{a^{k+1}b^{k+1}} \neq 0, \end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} (k-ah)a^{k-1} & (k-ah)a^{-k-1} \\ (k+bH)b^{k-1} & (k+bH)b^{-k-1} \end{pmatrix} = (k-ah)(k+bH) \cdot \det \begin{pmatrix} a^{k-1} & a^{-k-1} \\ b^{k-1} & b^{-k-1} \end{pmatrix} =$$

$$= (k-ah)(k+bH) (a^{k-1}b^{-k-1} - a^{-k-1}b^{k-1}) = (k-ah)(k+bH) \cdot \frac{a^{2k} - b^{2k}}{a^{k+1}b^{k+1}} \neq 0.$$

Найдём $M_1^{-1} = \begin{pmatrix} (k-ah)a^{k-1} & -(k-ah)a^{-k-1} \\ (k+bH)b^{k-1} & -(k+bH)b^{-k-1} \end{pmatrix}^{-1}$ и

$$M_2^{-1} = \begin{pmatrix} (k-ah)a^{k-1} & (k-ah)a^{-k-1} \\ (k+bH)b^{k-1} & (k+bH)b^{-k-1} \end{pmatrix}^{-1} :$$

$$M_1^{-1} = \frac{a^{k+1}b^{k+1}}{(k-ah)(k+bH)(b^{2k} - a^{2k})} \begin{pmatrix} -(k+bH)b^{-k-1} & (k-ah)a^{-k-1} \\ -(k+bH)b^{k-1} & (k-ah)a^{k-1} \end{pmatrix},$$

$$M_2^{-1} = \frac{a^{k+1}b^{k+1}}{(k-ah)(k+bH)(a^{2k} - b^{2k})} \begin{pmatrix} (k+bH)b^{-k-1} & -(k-ah)a^{-k-1} \\ -(k+bH)b^{k-1} & (k-ah)a^{k-1} \end{pmatrix}$$

Тогда из систем (13.27), (13.28) получаем:

$$\begin{pmatrix} A_k \\ A_{-k} \end{pmatrix} = \frac{a^{k+1}b^{k+1}}{(k-ah)(k+bH)(b^{2k} - a^{2k})} \begin{pmatrix} -(k+bH)b^{-k-1} & (k-ah)a^{-k-1} \\ -(k+bH)b^{k-1} & (k-ah)a^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} B_k \\ B_{-k} \end{pmatrix} = \frac{a^{k+1}b^{k+1}}{(k-ah)(k+bH)(a^{2k} - b^{2k})} \begin{pmatrix} (k+bH)b^{-k-1} & -(k-ah)a^{-k-1} \\ -(k+bH)b^{k-1} & (k-ah)a^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} A_k = \frac{1}{(k-ah)(k+bH)(b^{2k}-a^{2k})} (-(k+bH)a^{k+1}\alpha_{1k} + (k-ah)b^{k+1}\alpha_{2k}); \\ A_{-k} = \frac{a^{k+1}b^{k+1}}{(k-ah)(k+bH)(b^{2k}-a^{2k})} (-(k+bH)b^{k-1}\alpha_{1k} + (k-ah)a^{k-1}\alpha_{2k}); \\ B_k = \frac{1}{(k-ah)(k+bH)(a^{2k}-b^{2k})} ((k+bH)a^{k+1}\beta_{1k} - (k-ah)b^{k+1}\beta_{2k}); \\ B_{-k} = \frac{a^{k+1}b^{k+1}}{(k-ah)(k+bH)(a^{2k}-b^{2k})} (-(k+bH)b^{k+1}\beta_{1k} + (k-ah)a^{k+1}\beta_{2k}). \end{cases} \quad (13.29)$$

Ответ:

$$u(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} ((A_k r^k + A_{-k} r^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k r^k - B_{-k} r^{-k}) \sin(k\varphi)),$$

где коэффициенты $A_{\pm k}$ и $B_{\pm k}$ определяются из формул (13.26), (13.29), а

$$\alpha_{jk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_j(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (13.9)$$

$$\beta_{jk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_j(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (13.10)$$

№ 721. а) Найти гармоническую в кольце $0 < a < r < b$ функцию $u(r, \varphi)$, удовлетворяющую краевым условиям:

$$u(a, \varphi) = 0, \quad u(b, \varphi) = A \cos \varphi.$$

Запишем условия задачи:

Найти ограниченную функцию $u(r, \varphi)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r} (ru_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, & 0 < a \leq r < b, \quad 0 < \varphi < 2\pi; \\ |u(r, \varphi)| < \infty, \\ u(a, \varphi) = f_1(\varphi) = 0, \\ u(b, \varphi) = f_2(\varphi) = A \cos \varphi. \end{cases} \quad (13.30)$$

Шаг 1. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кольце.

Мы уже решили разделе 13.1 общую задачу Дирихле в кольце. Воспользуемся результатом:

$$u(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} ((A_k r^k + A_{-k} r^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k r^k - B_{-k} r^{-k}) \sin(k\varphi)), \quad (13.15)$$

где коэффициенты $A_{\pm k}$ и $B_{\pm k}$ определяются из формул (13.12), (13.14), а

$$A_0 = \frac{\alpha_{10} \ln b - \alpha_{20} \ln a}{2 \ln \frac{b}{a}}, \quad B_0 = \frac{\alpha_{20} - \alpha_{10}}{2 \ln \frac{b}{a}}; \quad (13.12)$$

$$\begin{cases} A_k = \frac{1}{a^{2k} - b^{2k}} (a^k \alpha_{1k} - b^k \alpha_{2k}); \\ A_{-k} = \frac{a^k b^k}{a^{2k} - b^{2k}} (-b^k \alpha_{1k} + a^k \alpha_{2k}); \\ B_k = \frac{1}{a^{2k} - b^{2k}} (a^k \beta_{1k} - b^k \beta_{2k}); \\ B_{-k} = \frac{a^k b^k}{a^{2k} - b^{2k}} (b^k \beta_{1k} - a^k \beta_{2k}). \end{cases} \quad (13.14)$$

$$\alpha_{jk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_j(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (13.9)$$

$$\beta_{jk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_j(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (13.10)$$

Шаг 2. Использование данных функций краевых условий.

Заданные функции $f_{1,2}(\varphi)$ имеют уже вид рядов Фурье, поэтому коэффициенты α_{jk} , β_{jk} находятся тривиально:

$$\alpha_{1k} = \beta_{1k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (13.31)$$

$$\alpha_{21} = A, \quad \text{а остальные } \alpha_{2k}, \beta_{2k} = 0. \quad (13.32)$$

Поэтому из формул (13.12), (13.14) получаем:

$$A_0 = \frac{\alpha_{10} \ln b - \alpha_{20} \ln a}{2 \ln \frac{b}{a}} = 0, \quad B_0 = \frac{\alpha_{20} - \alpha_{10}}{2 \ln \frac{b}{a}} = 0, \quad (13.33)$$

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{a^2 - b^2} (a\alpha_{11} - b\alpha_{21}) = \frac{-bA}{a^2 - b^2}; \\ A_{-1} = \frac{ab}{a^2 - b^2} (-b\alpha_{11} + a\alpha_{21}) = \frac{a^2 b A}{a^2 - b^2}; \\ A_{\pm k} = 0, \quad \text{при } k \neq 1; \\ B_k = 0; \\ B_{-k} = 0. \end{cases} \quad (13.34)$$

Подставляя эти коэффициенты в (13.15), получаем:

$$u(r, \varphi) = \left(A_1 r + A_{-1} \frac{1}{r} \right) \cos \varphi = \frac{-bA}{a^2 - b^2} \cdot \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \cos \varphi.$$

Ответ:

$$u(r, \varphi) = \frac{bA}{b^2 - a^2} \cdot \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \cos \varphi. \quad (13.35)$$

14. Интеграл Пуассона

Целью данного раздела является при помощи перемены порядка интегрирования и суммирования в формуле решения внутренней задачи Дирихле представить функцию $u(r, \varphi)$ в виде интегрального оператора от функции краевого условия $f(\varphi)$.

Шаг 1. Формальное изменение порядка интегрирования и суммирования
В разделе 11.2 (стр. 118 – 119) мы получили формулу решения внутренней задачи Дирихле в круге:

$$u(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^k (\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)), \quad (11.19)$$

где коэффициенты α_k и β_k определяются из формул

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (11.48)$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (11.49)$$

Подставим выражения для коэффициентов (поменяв в (11.48), (11.49) переменную φ на ψ) в формулу (11.19):

$$\begin{aligned}
u(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi + \\
&+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^k \left(\cos(k\varphi) \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos(k\psi) d\psi + \sin(k\varphi) \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin(k\psi) d\psi \right) = \\
&= \left[\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a - b) \right] = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^k \int_0^{2\pi} \cos(k(\psi - \varphi)) f(\psi) d\psi = [\mathbf{I}] = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^k \cos(k(\psi - \varphi)) \right] f(\psi) d\psi = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^k \frac{e^{ik(\psi-\varphi)} + e^{-ik(\psi-\varphi)}}{2} \right] f(\psi) d\psi = [\mathbf{II}] = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{re^{i(\psi-\varphi)}}{R} \right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{re^{-i(\psi-\varphi)}}{R} \right)^k \right] f(\psi) d\psi = \\
&= \left[\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q} \text{ при } |q| < 1 \right] = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{1}{1 - \frac{re^{i(\psi-\varphi)}}{R}} \cdot \frac{re^{i(\psi-\varphi)}}{R} + \frac{1}{1 - \frac{re^{-i(\psi-\varphi)}}{R}} \cdot \frac{re^{-i(\psi-\varphi)}}{R} \right] f(\psi) d\psi = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{re^{i(\psi-\varphi)}}{R - re^{i(\psi-\varphi)}} + \frac{re^{-i(\psi-\varphi)}}{R - re^{-i(\psi-\varphi)}} \right] f(\psi) d\psi = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - 2rR \cos(\psi - \varphi) + r^2) + 2rR \cos(\psi - \varphi) - 2r^2}{R^2 - 2rR \cos(\psi - \varphi) + r^2} \cdot f(\psi) d\psi = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\psi - \varphi) + r^2} \cdot f(\psi) d\psi.
\end{aligned}$$

Шаг 2. Обоснование допустимости почленного интегрирования.

Ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r e^{i(\psi-\varphi)}}{R} \right)^k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r e^{-i(\psi-\varphi)}}{R} \right)^k$$

сходятся равномерно и абсолютно по переменной $\psi \in \mathbb{R}$, поскольку:

1) при всех $\psi \in \mathbb{R}$ выполняется (равномерно) равенство:

$$\left| \frac{r^k e^{ik(\psi-\varphi)}}{R^k} \right| = \frac{r^k}{R^k};$$

2) числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^k$ сходится при $0 \leq r < R$,

и мы имеем право применить признак Вейерштрасса о равномерной и абсолютной сходимости функционального ряда, мажорированного сходящимся числовым.

Ряды, сходящиеся равномерно, можно интегрировать почленно, а ряды, сходящиеся абсолютно, можно складывать почленно, поэтому и переход **I**, и переход **II** являются правомочными.

Таким образом, мы получили формулу, называемую **интеграл Пуассона**:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\psi - \varphi) + r^2} \cdot f(\psi) d\psi.$$

Предметный указатель

Гармоники, 116

Граничные условия, 9

Интеграл Пуассона, 147

Задача

Дирихле, 10

для уравнения Лапласа, 118, 124, 135

Коши, 8

для уравнения теплопроводности, 54

для волнового уравнения, 28

Неймана, 11

для уравнения Лапласа, 128, 129, 139

Штурма–Лиувилля, 64, 65, 68, 72, 75, 80

начально-краевая, 12

третья краевая, 12

для уравнения Лапласа, 131, 133, 142

Канонический вид, 17, 20

алгоритм приведения, 17, 21

Краевые операторы классические, 64

Краевые условия, 9

Метод

Фурье

на отрезке, 64

в прямоугольнике, 105

характеристик, 48

продолжения, 39, 47

Ряд Фурье

вычисление коэффициентов, 108, 110

Теорема Стеклова, 64

Уравнение

Лапласа

в кольце, 135, 139, 142

в круге, 115, 118, 128, 131, 135

в полярных координатах, 115

вне круга, 115, 124, 129, 133, 135

гиперболическое, 16, 21

колебаний, 5

общее решение, 28

параболическое, 16, 21

стационарное, 7

теплопроводности, 6

волновое, 5

эллиптическое, 16, 21

Формула

Даламбера, 30, 31

Пуассона, 54

Характеристическая квадратичная форма, 16, 20

дискриминант, 16

Список литературы

- [1] *Бицадзе А.В., Калинин Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики.* – М.: Наука, 1985.
- [2] *Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.* – М.: Изд-во МГУ, 1999.
- [3] *Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики.* – М.: Наука, 1995.
- [4] *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике.* – М.: Наука, 1972.
- [5] *Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров.* – Перевод с англ., М.: Мир, 1985.
- [6] *Треногин В.А. Методы математической физики.* – Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
- [7] *Сборник задач по математической физике. Под ред. В.С. Владимиро*ва – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

Андрей Борисович Костин
Иван Владимирович Тихонов
Дмитрий Сергеевич Ткаченко

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Пособие по практическим
занятиям
Часть I

Работа печатается в авторской верстке.

Подписана в печать 13.11.2007. Формат $60 \times 84\frac{1}{16}$
Объем 9,5 п.л. Уч.-изд.л. 9,5. Тираж 200 экз.

Изд. № 4165.

Заказ

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет)

Типография издательства «Тривант».
Г. Троицк, Московская обл.